(昭和 24 年11月造船協会秋季講演会に於て講演)

自由表面が沒水体及び水上船舶の見掛質量に及ぼす影響に就て

正員 工學士 元 良 誠 三*

Abstract.

On the Effect of the Free Surface upon the Virtual Mass of Submerged Bodies and Ships.

By Seizo Motora, *Kogakushi*, *Member*.

In this paper, the author investigated into the effect of the free surface of water upon the virtual mass of submerged solids moving parallel to the free surface, and obtained following results :

1) The virtual mass of solid decreases by the effect of the free surface.

2) The virtual mass is not effected by the velocity of the solid, and is always constant when the depth of the solid is constant.

3) The effect of the free surface is represented by the effect of a solid placed at the image point of the submerged solid against the free surface, and has negative velocity.

物体が流体中で非定常運動を行うと，流体中に加速度に比例する圧力を生じ，その合圧力として加速度に比例する抵抗を受ける。即ち速度を v とすると

$$\text{抵抗}\quad R=R_1(v)\frac{dv}{dt}+R_2(v)$$

之は丁度物体の質量が比例係数 $R_1(v)$ 丈増加したと同一効果を生ずるので見掛質量効果と称する。

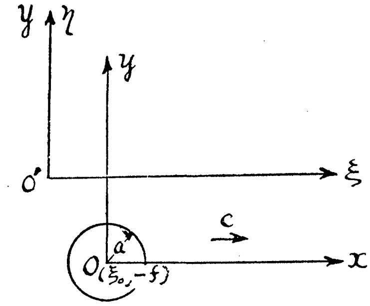
自由表面の無い理想流体中では，見掛質量は速度に無関係に常に一定である。所が自由表面があると，速度によつて表面の波が変化する為，見掛質量も速度と共に変化する事が予想されるので，最初沒水円壔に就いて計算を行い水上船舶の場合にも拡張して見た。結論としては予想に反して，見掛質量は速度及び運動歴に無関係なる事自由表面の存在は見掛質量を減少せしめる事及び自由表面の影響は，物体の水面に対する鏡像が逆進，する場合のものと同一なる事が判つた。

§1. 二次元の場合……沒水円壔

i) 静止水面上に原点 o' を有し，水面上進行方向に ξ 軸垂直上方に η 軸を取る。 $\xi o'\eta$ は空間に固定せるものである。

円壔の中心 $o(\xi_0,\ -f)$ に原点を持つ動座標を $x,\ o,\ y$ とする。円壔は正 x 軸方向に c なる速度で運動しつつあるものと考える。即ち

$$\left.\begin{aligned} x&=\xi-\xi_0 & \frac{dx}{dt}&=-\frac{d\xi_0}{dt}=-c \\ y&=\eta+f & \frac{dy}{dt}&=0 \end{aligned}\right\}\qquad(1)$$



第 1 図

円壔の囲りの流れを自由表面の無い時の流れと，自由表面による部分的擾乱の項とに分けて考え速度ポテンシアルを

$$\phi=\phi_0+\phi_1\qquad(2)$$

とすると，ϕ_0 は doublet で

$$\phi_0=ca\frac{x}{r^2}=ca^2\int_0^\infty e^{-ky}\sin kx\,dk\qquad(3)$$

---

* 東京大学第二工学部助教授

自由表面の隆起を h とし，ϕ_1 と h を次の如く仮定する。

$$\phi_1=\int_0^\infty e^{k\eta}\{\alpha_1(k,t)\cos kx+\alpha_2(k,t)\sin kx\}\,dk \tag{4}$$

$$h=\int_0^\infty\{\beta_1(k,t)\cos kx+\beta_2(k,t)\sin kx\}\,dk \tag{5}$$

自由表面の条件は速度の二乗の項を省略して

$$\left.\begin{array}{ll}\text{a)} & \dfrac{\partial\phi}{\partial t}+gh=\text{const} \quad (6)\\ \text{b)} & \dfrac{\partial\phi}{\partial\eta}=\dfrac{\partial h}{\partial t} \quad (7)\end{array}\right\}\begin{array}{l}z=f\\ \eta=0\end{array}$$

この条件を満足する様に (4),(5) の $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ を定めると，$dx/dt=-c$ を考慮して

(6) 式より $\dot{\alpha}_1+g\beta_1-kc\alpha_2-kc^2a^{2-kf}=0$ (8)

$$\dot{\alpha}_2+g\beta_2+kc\alpha_1+\dot{c}a^2e^{-kf}=0 \tag{9}$$

(7) 式より $\alpha_1=\dfrac{1}{k}\dot{\beta}_1-\beta_2c$ (10)

$$\alpha_2=\frac{1}{k}\dot{\beta}_2+\beta_1c+ca^2e^{-kf} \tag{11}$$

(8),(9),(10),(11) 式より $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ が連立方程式として求められる。今この4式より α_1, α_2 を消去すると (10),(11) を微分して (8),(9) に代入して

$$\begin{cases}\ddot{\beta}_1-2kc\dot{\beta}_2-k\dot{c}\beta_2+(g-kc^2)k\beta_1-2k^2c^2a^2e^{-kf}=0 & (12)\\ \ddot{\beta}_2+2kc\dot{\beta}_1+k\dot{c}\beta_1+(g-kc^2)k\beta_2+2kca^2e^{-kf}=0 & (13)\end{cases}$$

(12),(13) が基礎の微分方程式で之を t の函数として解けば，任意の時刻に於ける波高 h が (5) 式より判り，(10),(11) 式より α_1 α_2 を求めれば速度ポテンシアル従つて圧力分布が判る。然し一般に速度 c が時間の函数である場合には (12),(13) は簡単には解き得ない。

今或瞬間 $t=0$ に着目して，其瞬間に於ける加速度抵抗を求めて見る。$\beta_1\beta_2$, $\alpha_1\alpha_2$ を t について Taylor 級数に展開すると

$$\left\{\begin{array}{l}\beta_1=\beta_{10}+\dot{\beta}_{10}t+\dfrac{\ddot{\beta}_{10}}{2}t^2+\cdots\cdots\\ \beta_2=\beta_{20}+\dot{\beta}_{20}t+\dfrac{\ddot{\beta}_{20}}{2}t^2+\cdots\cdots\end{array}\right\} \tag{14}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_1=\alpha_{10}+\dot{\alpha}_{10}t+\dfrac{\ddot{\alpha}_{10}}{2}t^2+\cdots\cdots\\ \alpha_2=\alpha_{20}+\dot{\alpha}_{20}t+\dfrac{\ddot{\alpha}_{20}}{2}t^2+\cdots\cdots\end{array}\right\} \tag{15}$$

又速度を $c=c_0+At+\cdots\cdots$ (16)

(5) 式より $h_{t=0}=\displaystyle\int_0^\infty(\beta_{10}\cos kx+\beta_{20}\sin kx)\,dk$ (17)

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{t=0}=\int_0^\infty(\dot{\beta}_{10}\cos kx+kc\beta_{10}\sin kx+\dot{\beta}_{20}\sin kx-kc\beta_{20}\cos kx)\,dk \tag{18}$$

$t=0$ の瞬間に於ける波高が与えられれば，上式より $\beta_{10},\beta_{20},\dot{\beta}_{10},\dot{\beta}_{20}$ が定まり (14) は常数4個を含む一般解となるわけである。

ii) 其処で円壔の囲りの圧力分布は

$p=\rho\dfrac{\partial\phi}{\partial t}$ で与えられるから

抵抗 R は $R=\rho\displaystyle\iint\frac{\partial\phi}{\partial t}l\,dS$ (23)

なる圧力積分を行えば求められる $\left(\begin{array}{l}l\cdots\cdots\text{方向余弦}\\ dS\cdots\text{面積素分}\end{array}\right)$。

今問題として居るのは加速度に関係のある項のみであるから，圧力 $\partial\phi/\partial t$ 中加速度を含む項を集めて見ると，

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{t=0}=\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial t}+\frac{\partial\phi_1}{\partial t}\right)_{t=0}$$

$$\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial t}\right)_{t=0}=\frac{ax}{r^2}\cdot A+f_1(c_0) \tag{24}$$

$$\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial t}\right)_{t=0}=\int_0^\infty e^{k\eta}(\dot{\alpha}_{10}\cos kx+\dot{\alpha}_{20}\sin kx)\,dk+\int_0^\infty e^{k\eta}(kc_0\alpha_{10}\sin kx-kc_0\alpha_{20}\cos kx)\,dk$$

然るに (10), (11) 式より見て α_{10}, α_{20} は初期条件により定まり，加速度を含まないから第二項は加速度を含まない。

$$\therefore\quad\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial t}\right)_{t=0}=\int_0^\infty e^{k\eta}(\dot{\alpha}_{10}\cos kx+\dot{\alpha}_{20}\sin kx)dk+{}_2f_2(c_0) \tag{25}$$

iii) 之で圧力分布が求められたわけであるが，今の近似の段階では表面の擾乱による円壔表面の乱れを省略してあるので，第三近似として円壔の表面に於ける条件を満足せしめる様に新に ϕ_2 なる速度ポテンシアルを加える。即ち ϕ_2 は $\Delta^2\phi_2=0$ 及び $(\partial(\phi_1+\phi_2)/\partial r)_{r=a}=0$ を満足しなければならない。

ϕ_1 を反転せしめて

ϕ_1 中の $e^{k\eta}\binom{\cos}{\sin}kx$ の項を

$$e^{kf}\cdot e^{ka^2\sin\theta/r}\binom{\cos}{\sin}ka^2\cos\theta/r$$

で置換すれば，上記の条件は満たされる。

$$\therefore\quad\phi_2=\int_0^\infty\left\{\alpha_1\cos k\left(\frac{a^2x}{r^2}\right)+\alpha_2\sin k\left(\frac{a^2x}{r^2}\right)\right\}e^{-kf+ka^2\frac{\eta+f}{r^2}}dk \tag{26}$$

$$\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial t}\right)_{t=0}=\int_0^\infty\left\{\dot{\alpha}_{10}\cos kX+\dot{\alpha}_{20}\sin kX\right\}e^{-k(f-Y)}dk+f_3(c_0) \tag{27}$$

$$\text{玆に}\quad X=\frac{a^2x}{r^2},\qquad Y=\frac{a^2y}{r^2}$$

(24), (25), (27) を (23) 式に入れて圧力積分を行えば加速度に比例する抵抗が求められる。

iv) 静止より加速度 A で出発する場合

$t=0$ で $c_0=0$, $h_0=0$, $\dot{h}_0=0$ (水面静止)

(5) 式より　$h_0=0\cdots\cdots\beta_{10}=\beta_{20}=0$

$\dot{h}_0=0\cdots\cdots\dot{\beta}_{10}=\dot{\beta}_{20}=0$

(17), (18) 式より　$\ddot{\beta}_{10}=0$

$\ddot{\beta}_{20}=-2ka^2e^{-kf}\cdot A$

之を (10), (11) に代入すると　$\dot{\alpha}_{10}=0$

$\dot{\alpha}_{20}=-Aa^2e^{-kf}\cdots\cdots$

之を (25) 式に入れ $r=a$ と置くと

$$\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial t}\right)_{\substack{t=0\\r=a}}=\int_0^\infty-Aa^2e^{-k(f-\eta)}\sin kx\cdot dk \tag{28}$$

(27) 式に入れると $r=a$ で $X=x$, $Y=y$ なる故

$$\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial t}\right)_{\substack{t=0\\r=a}}=\int_0^\infty-Aa^2e^{-k(f-\eta)}\sin kx\cdot dk \tag{29}$$

(28), (29) を (23) に入れて圧力積分を行うと

$$R=-\rho\int_0^{2\pi}\frac{\partial\phi}{\partial t}\cdot a\cos\theta\cdot d\theta=-\rho\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial t}+\frac{\partial\phi_1}{\partial t}\right)a\cos\theta\cdot d\theta$$

$$=-\rho\int_0^\infty\int_0^{2\pi}Aa^3e^{k(f-y)}\sin kx\cdot\cos\theta\cdot dk\cdot d\theta+2\rho Aa^3\int_0^\infty\int^{2\pi}e^{-k(2f-y)}\sin kx\cdot\cos\theta\cdot dk\cdot d\theta \tag{30}$$

(30) 式第一項が自由表面の無い時の加速度抵抗で

$$R_1=-\rho\pi a^2\cdot A \tag{31}$$

第二項が自由表面の影響で

$$2R_2=2\rho a^3A\int_0^{2\pi}\frac{a\cos^2\theta}{a^2-4af\sin\theta+4f^2}=\pi\rho a^2\left(\frac{a}{f}\right)^2\cdot A\quad(f>2a)$$

結局

$$R=R_1+R_2=-\rho\pi a^2\cdot\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{f}\right)^2\right\}\cdot A \tag{32}$$

見掛質量は $m'=\dfrac{R}{A}=+\rho\pi a^2\left\{1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{f}\right)^2\right\}$

即ち自由表面の為見掛質量は第二項丈減少する事が判る。又その影響は 半径/深さ の二乗に比例して減少する。

v) 定速 c_0 で進行中更に加速する場合

$t=0$ で $h_0=h_{c_0}$, $\dot{h}_0=\dot{h}_{c_0}$

Lamb. "Hydrodynamics" §247 の結果を用いると

$$h_{c_0}=2a^2\int_0^\infty\frac{ke^{-kf}\cos kx}{k-\kappa_0}dk \tag{33}$$

$$\left(\kappa_0=\frac{g}{c_0^2}\right)$$

(5) 式より $\beta_{10}=\dfrac{2a^2ke^{-kf}}{k-\kappa_0}$ $\beta_{20}=0$

$\dot{\beta}_{10}=0$ $\dot{\beta}_{20}=0$

(17), (18) 式より $\ddot{\beta}_{10}$ は加速度を含まず

$$\ddot{\beta}_{20}=\frac{-2k(2k-\kappa_0)}{k+\kappa_0}a^2e^{-kf}\cdot A+f_4(c_0)$$

之を (10), (11) に代入して見ると

α_{10}, α_{20}, $\dot{\alpha}_{10}$ は共に加速度を含まず

$$\dot{\alpha}_{20}=-a^2Ae^{-kf}+f_5(c_0) \tag{34}$$

之は iv) の結果に加速度を含まぬ項 $f_5(c_0)$ が加わつた丈であるから，結局見掛質量は速度如何に拘らず一定なる事が判る。又加速度を含まない項を集めて圧力積分を行えば定常抵抗 R_{c_0} となる。

vi) 任意の運動を行う場合

或瞬間 $t=0$ に於ける速度を c_0, 加速度を A, 波高を h_0, 水面の垂直速度を $\dot{h}_0$ とする。

流体圧力中加速度を含む可能性のあるのは $\partial\phi_1/\partial t$ 中の $\dot{\alpha}_{10}$ 及び $\dot{\alpha}_{20}$ である。今迄は (12), (13) 式より $\ddot{\beta}_{10}$, $\ddot{\beta}_{20}$ を求めて $\dot{\alpha}_{10}$, $\dot{\alpha}_{20}$ を求めて来たが，実は $t=0$ の解は直接に (8), (9) 式に (10), (11) 式を代入して $t=0$ 置とく事により

$$\dot{\alpha}_{10}=c_0\dot{\beta}_{20}+(kc_0^2-g)\beta_{10}-2kc_0^2a^2e^{-kf} \tag{8'}$$

$$\dot{\alpha}_{20}=-c_0\dot{\beta}_{10}+(kc_0^2-g)\beta_{20}-Aa^2e^{-kf} \tag{9'}$$

β_{10}, β_{20}, $\dot{\beta}_{10}$, $\dot{\beta}_{20}$ は前述の如く初期条件 h_0 及び $\dot{h}_0$ のみによつて定まる故加速度を含まない。

故に $\dot{\alpha}_{20}$ のみが加速度を含み

$$\dot{\alpha}_{20}=-Aa^2e^{-kf} \tag{35}$$

之は初期条件如何に拘らず成立する。(3), (4) 式より

自由表面無き時の圧力： $$\rho\frac{\partial\phi_0}{\partial t}=\int_0^\infty A\cdot a^2e^{-k(\eta+f)}\sin kx\cdot dk \tag{36}$$

自由表面の影響： $$2\rho\frac{\partial\phi_1}{\partial t}=-2\int_0^\infty Aa^2e^{-k(f-\eta)}\sin kx\cdot dk \tag{37}$$

圧力積分を行えば $$R_1=\pi\rho a^2A \tag{38}$$

$$R_2=-\frac{1}{2}\pi\rho a^2\left(\frac{a}{f}\right)^2A \tag{39}$$

即ち任意の非定常運動を行つても自由表面の影響は常に一定で (39) 式で示される。

(36), (37) 式より判る様に之は水面に対し鏡像の位置ある逆進する円壔による影響の倍に等しい。

今迄の議論は波動による速度の二乗の項を省略し，且自由表面の条件を近似的に $\eta=0$ なる静止時水面上で合

わせて居るので，之を厳密に行えばこの結果も修正さるべきであろう。

v) 底面の影響 見掛質量に及ぼす底面の影響は第二工学部の田崎亮氏により計算された。その結果丈を述べると

$$\pi a^2 H\left[1+\left(\frac{a}{2h}\right)^2+\left(\frac{a}{2h}\right)^4\right\}-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{\left(\frac{a}{nd+f}\right)^2+2\left(\frac{a}{(n+1)d}\right)^2+\left(\frac{a}{(n+1)d+h}\right)^2\right\}\right]$$

但し $H=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{2h}\right)4h,\quad d=f+h=$水の深さ

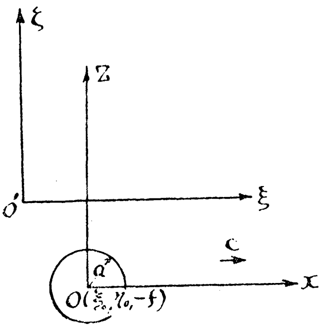
f……自由表面より円壔中心迄の深さ

h……円壔中心より底面迄の距離

§2. 三次元……球の場合

静止水面上に原点 o' を有する如く，静止座標系 $(o'-\xi,\eta,\zeta)$ を取り球の中心 $(\xi_0,\eta_0,-f)$ を原点とする動座標を $(o-x,y,z)$ とする。

球は正 x 軸方向え c なる速度で運動するものと考える。



第 2 図

即ち
$$\begin{cases} x=\xi-\xi_0 & \dot{x}=-\dot{\xi}_0=-c \\ y=\eta-\eta_0 & \dot{y}=0 \\ z=\zeta+f & \dot{z}=0 \end{cases}$$

自由表面の無い時の球の囲りの速度ポテンシアルは

$$\phi_0=\frac{ca^3x}{r^3}=-\frac{\partial}{\partial x}\frac{ca^3}{2}\frac{1}{r}$$
$$=-\frac{\partial}{\partial x}\frac{ca^3}{2}\int_0^{\infty}e^{-kz}J_0(k\sqrt{x^2+y^2})dk \tag{1}$$

$J_0(k\sqrt{x^2+y^2})$ を積分形に書き換えて

$$\phi_0=-\frac{\partial}{\partial x}\frac{ca^3}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty}e^{-kz+ik(x\cos\theta+y\sin\theta)}d\theta\cdot dk$$

y につき ϕ_0 は対称故
$$=-\frac{ca^3}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty}e^{-kz}\cos(kx\cos\theta)\cos(ky\sin\theta)\,d\theta\cdot dk$$
$$=\frac{ca^3}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty}e^{-kz}\sin(kx\cos\theta)\cos(ky\sin\theta)\cos\theta\cdot kd\theta\cdot dk \tag{2}$$

自由表面を満足せしめる為に新に速度ポテンシアル φ_1 と波高を次の如く仮定する。

$$\varphi_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty}e^{k\zeta}\{\alpha_1(k,\theta,t)\cos(kx\cos\theta)+\alpha_2(k,\theta,t)\sin(kx\cos\theta)\}\cos(ky\sin\theta)k\cos\theta\cdot d\theta\cdot dk \tag{3}$$

$$h=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty}\cdot\{\beta_1(k,\theta,t)\cos(kx\cos\theta)+\beta_2(k,\theta,t)\sin(kx\cos\theta)\}\cos(ky\sin\theta)k^2\cos\theta\cdot d\theta\cdot dk \tag{4}$$

自由表面の条件
$$\left.\begin{aligned} &\text{a)}\quad \frac{\partial\phi}{\partial t}+gh=\text{const} \\ &\text{b)}\quad \frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial h}{\partial t}\end{aligned}\right\}\ \text{at}\ \begin{matrix} z=f \\ \zeta=0\end{matrix} \tag{5}$$

$\phi=\phi_0+\phi_1$ として (2),(3),(4) を (5) に代入すると

a) より
$$\dot{\alpha}_1=kc\cos\theta\alpha_2-kg\beta_1+kc^2\cos\theta\cdot\frac{a^2}{2}e^{-kf} \tag{6}$$
$$\dot{\alpha}_2=-kc\cdot\cos\theta\alpha_1-kg\beta_2-\frac{\dot{c}a^3}{2}e^{-kf} \tag{7}$$

b) より
$$\alpha_1=\dot{\beta}_1-kc\cdot\cos\theta\beta_2 \tag{8}$$
$$\alpha_2=\dot{\beta}_2+kc\cdot\cos\theta\beta_1+\frac{ca^3}{2}e^{-kf} \tag{9}$$

一般非定常運動の微分方程式は (6,),(7),(8),(9) より α_1, α_2 を消去して

$$\ddot{\beta}_1-2kc\cdot\cos\theta\dot{\beta}_2-k\dot{c}\cos\theta\cdot\beta_2-k(g-kc^2\cos\theta)\beta_1-kc^2\cos\theta\cdot a^3e^{-kf}=0 \tag{10}$$

$$\ddot{\beta}_2+2kc\cdot\cos\theta\cdot\dot{\beta}_1+k\dot{c}\cos\theta\beta_1-k(g-kc^2\cos\theta)\beta_2-\dot{c}a^3e^{-kf}=0 \tag{11}$$

之を解けば任意の時刻に於ける波高が判り，(6),(7) より圧力分布が求められる。

$t=0$ の瞬間に於ける圧力分布は §1 と同様の考えにより (6),(7),(8),(9) 式より $\dot{\alpha}_1$, $\dot{\alpha}_2$ を求めると

$$\dot{\alpha}_1 = kc\cdot\cos\theta\cdot\dot{\beta}_2 - k\,(g-kc^2\cdot\cos\theta)\beta_1 + kc^2\cos\theta\cdot\frac{a^2}{2}e^{-kf} \tag{12}$$

$$\dot{\alpha}_2 = -kc\cdot\cos\theta\cdot\dot{\beta}_1 - k\,(g-kc^2\cos\theta)\,\beta_2 - \frac{\dot{c}a^3}{2}e^{-kf} \tag{13}$$

§1 と同様 α_1, α_2, β_1, β_2 をに就いて Taylor 級数に展開し，(12),(13) に代入して $t=0$ と置くと

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_{10} = kc_0\cos\theta\cdot\dot{\beta}_{20} - k\,(g-kc_0{}^2\cos\theta)\,\beta_{10} + kc_0{}^2\cos\theta\dfrac{a^2}{2}e^{-kf} \\ \dot{\alpha}_{20} = -kc_0\cos\theta\cdot\dot{\beta}_{10} - k(g-kc_0{}^2\cos\theta)\,\beta_{20} - \dfrac{Aa^3}{2}e^{-kf} \end{cases}$$

β_{10}, β_{20}, $\dot{\beta}_{10}$, $\dot{\beta}_{20}$ は初期条件により定まる故，加速度を含まない。従つて加速度を含むのは $\dot{\alpha}_{20}$ で

$$\dot{\alpha}_{20} = -\frac{Aa^3}{2}e^{-kf} \tag{15}$$

之はその時の速度を含まないから，初期条件如何に拘らず一定である。圧力 $\rho\dfrac{\partial\phi}{\partial t}$ 中加速度を含む項のみを集めると，(2) より

$$\left(\rho\frac{\partial\phi_0}{\partial t}\right)_{t=0} = \frac{\rho Aa^3}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty} e^{-kz}\sin(kx\cos\theta)\cos(ky\sin\theta)\,k\cos\theta\,d\theta\cdot dk$$

$$= \frac{\rho Aa^3}{2}\frac{x}{\sqrt{\{x^2+y^2+(\zeta+f)^2\}^3}} \tag{16}$$

(3) より

$$\left(\rho\frac{\partial\phi_1}{\partial t}\right)_{t=0} = -\frac{\rho Aa^3}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty} e^{-k(f-\zeta)}\sin(kx\cos\theta)\cos(ky\sin\theta)\,k\cos\theta\cdot d\theta\cdot dk$$

$$= -\frac{\rho Aa^3}{2}\frac{x}{\sqrt{\{x^2+y^2+(f+\zeta)^2\}^3}} \tag{17}$$

(16) が自由表面無き時の圧力，(17) が自由表面の影響である。(17) より自由表面の影響は表面に関し鏡像の位置に置かれた逆進する球によるものに等しい。

圧力積分 $\displaystyle\iint\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}\cdot l\,dS$ を行うと

(16) より
$$R_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\rho Aa^3}{2}\frac{a^3\sin^3\varphi\cos^2\theta}{r^3}d\theta d\varphi = \frac{2}{3}\rho\pi a^3 A \tag{18}$$

自由表面の影響は (17) 式より

$$R_2 = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\rho Aa^3}{2}\frac{a^3\sin^3\varphi\cos^2\theta\quad d\theta\cdot d\varphi}{\sqrt{\{a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + a^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + (a\cos\varphi-2f)^2\}^3}}$$

$$= -\frac{1}{3}\pi\rho a^3\cdot A\left(\frac{a}{f}\right)^3 \tag{19}$$

$$(2f>a)$$

$$R = R_1 + R_2 = \frac{2}{3}\pi\rho a^3\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{f}\right)^3\right\}\cdot A$$

見掛質量は

$$m' = \frac{R}{A} = \frac{2}{3}\pi\rho a^3\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{f}\right)^3\right\} \tag{20}$$

第二項が自由表面の影響で，見掛質量を減少せしめる事及び 半径/深さ の三乗に比例して減少する事が判る。

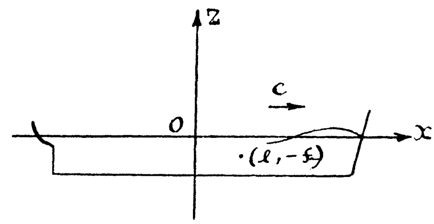
§3. 三次元……一般船型

船の図水面上に原点を有する如く座標 $(o, -x_1, y, z)$ を取る。

$$\begin{cases} \dot{x} = -c \\ \dot{y} = \dot{z} = 0 \end{cases}$$

今 $p(o, o, -f)$ なる点に μ なる強さの source があるとすると，速度ポテンシアルは

$$\phi_0=\frac{\mu}{\sqrt{x^2+y^2+(z+f)^2}}$$
$$=\mu\int_0^\infty e^{-k(z+f)}J_0\left(k\sqrt{x^2+y^2}\right)dk$$
$$=\frac{\mu}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^\infty e^{-k(z+f)+ik(x\cos\theta+y\sin\theta)}d\theta\cdot dk \qquad (1)$$



第 3 図

y につき対称故

$$\phi_0=\frac{\mu}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^\infty e^{-k(z+f)}\cos(kx\cos\theta)\cos(ky\sin\theta)\,d\theta\cdot dk \qquad (2)$$

自由表面の条件を合わせる為の附加ポテンシアルを ϕ_1, 波高を h とすると

$$\phi_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^\infty e^{kz}\{\alpha_1\cos(kx\cos\theta)+\alpha_2\sin(kx\cos\theta)\}\cos(ky\sin\theta)\,d\theta\cdot dk \qquad (3)$$

$$h=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^\infty k\{\beta_1\cos(kx\cos\theta)+\beta_2\sin(kx\cos\theta)\}\cos(ky\sin\theta)\,d\theta\cdot dk \qquad (4)$$

自由表面の条件　a) $\frac{\partial\phi}{\partial t}+gh=\text{const}$

b) $\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{\partial h}{\partial t}$　　at　$z=0$

に代入すると

a) より
$$\begin{cases}\dot{\alpha}_1=kc\cdot\cos\theta\cdot\alpha_2-k\beta_1-\dot{\mu}e^{-kf} & (5)\\ \dot{\alpha}_2=-kc\cdot\cos\theta\,\alpha_1-k\beta_2-\mu\cdot kc\cdot\cos\theta\cdot e^{-kf} & (6)\end{cases}$$

b) より
$$\begin{cases}\alpha_1=\dot{\beta}_1-kc\cdot\cos\theta\cdot\beta_2+\mu e^{-kf} & (7)\\ \alpha_2=\dot{\beta}_2+kc\cdot\cos\theta\,\beta_1 & (8)\end{cases}$$

(5), (6), (7), (8) より

$$\dot{\alpha}_1=kc\cdot\cos\theta\cdot\dot{\beta}_2-k(1-k^2c^2\cos^2\theta)\beta_1-\dot{\mu}e^{-kf} \qquad (9)$$
$$\dot{\alpha}_2=kc\cdot\cos\theta\cdot\dot{\beta}_1-k(1-k^2c^2\cos^2\theta)\,\beta_2-\mu\cdot kc\cdot\cos\theta\cdot e^{-kf} \qquad (10)$$

§1, §2 と同様 $t=0$ の瞬間の値を α_{10},α_{20}, β_{10},β_{20} とすると，之等は初期条件より定まり加速度を含まないから，

(9) 式より，$\dot{\alpha}_{10}$ のみが加速度を含み

$$\dot{\alpha}_{10}=-\dot{\mu}e^{-kf} \qquad (11)$$

從つて圧力 $\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}$ 中加速度を含む項は (11) を (3) に代入して

$$\rho\frac{\partial\phi_0}{\partial t_0}=\rho\frac{\dot{\mu}}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^\infty e^{-k(z+f)}\cos(kx\cos\theta)\cos(ky\sin\theta)d\theta\cdot dk=\frac{\rho\dot{\mu}}{\sqrt{x^2+y^2+(z+f)^2}} \qquad (12)$$

$$\rho\frac{\partial\phi_1}{\partial t}=-\rho\frac{\dot{\mu}}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^\infty e^{-k(f-z)}\cos(kx\cos\theta)\cos(ky\sin\theta)\,d\theta\cdot dk=-\frac{\rho\dot{\mu}}{\sqrt{x^2+y^2+(f+z)^2}} \qquad (13)$$

今船型を $y=f(x,z)$, $\frac{dy}{dx}=F(x,z)$ すとると，

$x-z\,pl$ 上に

$$\sigma(x,z)=-\frac{c}{2\pi}F(x,z) \qquad (14)$$

なる source 分布によつて自由表面の無い場合の船体の囲りのポテンシアルが表わされる。

点 $(l,o,-f)$ に $\sigma(l,f)\,dl\cdot df$ なる source があれば，その source による圧力中加速度を含む項は (12), (13) 式より

$$\delta\left(\rho\frac{\partial\phi_0}{\partial t}\right)=\frac{\rho\dot{\sigma}(l,f)\,dl\cdot df}{\sqrt{(x-l)^2+(z+f)^2}}=-\frac{\rho A}{2\pi}\frac{F(l,f)\,dl\cdot df}{\sqrt{(x-l)^2+(z+f)^2}}$$

$$\delta\left(\rho\frac{\partial\phi_1}{\partial t}\right)=-\frac{\rho\dot{\sigma}(l,f)\,dl\cdot df}{\sqrt{(x-l)^2+(z+f)^2}}=+\frac{\rho A}{2\pi}\frac{F(l,f)\,dl\cdot df}{\sqrt{(x-l)^2+(z+f)^2}}$$

之を l に就て $-L/2\sim L/2$ 迄，f について $(o\sim d)$ 迄積分すれば，船体の囲りの圧力分布となる。

$$\rho\frac{\partial\phi_0}{\partial t}=-\frac{\rho A}{2\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\int_0^d\frac{F(l,f)dl\cdot df}{\sqrt{(x-l)^2+(z+f)^2}} \tag{15}$$

$$\rho\frac{\partial\phi_1}{\partial t}=\frac{\rho A}{2\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\int_0^d\frac{F(l,f)\,dl\cdot df}{\sqrt{(x-l)^2+(z+f)^2}} \tag{16}$$

圧力積分 $R=\iint pl\cdot dS$ を行うと

$$l\doteqdot\frac{dy}{dx}\doteqdot F(x,z),\qquad dS=dx,dz \quad 故$$

自由表面無き時の加速度抵抗

$$R_1=-\int_{-L/2}^{L/2}\int_0^d\int_{-L/2}^{L/2}\int_0^{-d}\frac{F(l,f)\,F(x,z)}{\sqrt{(x-l)^2+(z+f)^2}}dl\cdot df\cdot dx\cdot dz \tag{17}$$

自由表面の影響

$$R_2=\frac{\rho A}{2\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\int_0^d\int_{-L/2}^{L/2}\int_0^{-d}\frac{F(l,f)\,F(x,\ z)}{\sqrt{(x-l)^2+(f-z)^2}}dl\cdot df\cdot dx\cdot dz \tag{18}$$

R_1/A, R_2/A が夫々自由表面無き時の見掛質量及び自由表面による見掛質量の変化を表わす。

(17), (18) 式より見て，自由表面の影響は速度に無関係に一定なる事，見掛質量を減少せしめる事，及び水面に関する鏡像が逆進する時の効果に等しい事が判る