

# 係留浮体の運動を考慮した係留ラインの 動的挙動について

正員 中嶋俊夫\*\* 正員 元良誠三\*  
正員 藤野正隆\*

On the Dynamic Responses of the Moored Object  
and the Mooring Lines in Regular Waves

by Toshio Nakajima, *Member* Seizo Motora, *Member*  
Masataka Fujino, *Member*

## Summary

This paper presents both theoretical and experimental studies on evaluating dynamic responses of the moored object and the mooring lines in regular waves. This time domain method treats the mooring line as lumped parameter system of discrete masses and considers the mutual interaction of dynamic response between the moored body and the mooring lines. Numerical results for the motions of the moored body and the dynamic mooring tensions were obtained and are compared with experimental data with excellent agreement.

As a result of this study, it is found that the dynamic effect on the mooring tension is significant when the floating body is moored and may influence on the body motion considerably unless the body is large enough in size. Secondly, the effect of this dynamic tension on the moored body motions becomes large comparing with that of the nonlinearity of the mooring restoration in case that the mooring line is heavy. Therefore, it is concluded that the dynamic analysis of the mooring line is important for the analysis of the moored body motion and for the design of the mooring system.

## 1 緒 言

一般に浮遊式海洋構造物は、長期間にわたって係留されることが多いため、係留ラインおよび係留浮体の運動に関する解析は、構造物の安全上、重要である。これらの研究については、数多くの論文<sup>1),2),3)</sup>があげられるが、係留ラインの係留浮体に与える効果には、準静的な張力を考えるのみで、係留ラインの動的効果を考慮した例はあまりない。その理由としては、係留ラインの動的挙動や変動張力を簡便に計算できる方法があまりないことが第一にあげられるが、そのほか、通常の海洋構造物に使用する係留索・鎖は、構造物自体に比べて質量が小さく、また非常にスラックな状態で係留されることが多いため、係留ラインの与える動的な効果は少ないと考えられることによる。しかしながら、台風などの暴風雨時にお

いては、係留浮体が大きく片よりを起こし、大振幅の激しい運動を引き起こすことが予想され、このような状態においては、もはや係留ラインをカタナリー理論などを利用した準静的取扱いで解析してゆくことは適切でない。

一方、最近アメリカや日本で行われている OTEC (海洋温度差発電プラント) の洋上実験などのように、深海域で、しかもあまり規模の大きくない構造物を係留する場合においては、係留浮体の運動に与える係留ラインの動的効果は大きいことが考えられ、プラントならびに係留ラインの設計上、係留ラインの動的挙動を含めた解析は重要な問題となる。そこで本研究では、係留ラインの係留浮体に与える動的効果が無視できないような場合における、係留浮体の運動および係留ラインに働く変動張力について論じることとする。この種の論文には、小寺山<sup>4)</sup>、島田ら<sup>5)</sup>があるが、双方とも、係留ラインの動的効果については、係留ラインがカタナリー曲線を保持すると仮定し、係留ラインに働く慣性力と線形化された抗力の近似式を用いて動的張力を計算してゆく方法を取って

\* 東京大学工学部

\*\* 住友重機械工業(株)平塚研究所(研究当時 東京大学大学院)

いる。しかしながら、大振幅の運動を考慮する場合においては、係留ラインをカタナリー近似してゆく仮定では無理があり、また係留ラインの非線形性を無視して考えることはできないと考えられる。

本論文では、係留ラインを有限個の要素に分割し、各要素の質量および各要素に加わる流体力を1点に集中化した「質点系モデル」として取扱い、係留ラインの挙動を簡便に計算する方法を示す。また、このように係留ラインをモデル化して取扱うことによって、係留ラインに働く非線形流体力を考慮した係留ラインの動的挙動ならびに係留浮体と係留ラインの動的な相互干渉効果を含めた解析を行ったので報告する。

## 2 係留浮体および係留ラインの運動解析法

### 2.1 座標系

係留浮体の運動を解析するに当たって、座標系を空間固定座標系と、係留浮体の重心を中心とする移動空間座標系の2種類を考える。次に示すように前者は、波浪および係留ラインの運動の計算のための2種類の座標系を考え、また後者は、浮体の運動計算に用いる (Fig. 1 参照)。

- 1)  $O, (x, z)$ : 原点を静止状態の自由表面上で、係留浮体の重心  $G$  直上に置く空間固定座標 (波の運動および粒子速度)
- 2)  $G, (x_G, z_G)$ : 原点を係留浮体の重心に置く移動空間座標 (浮体の運動および流体力)
- 3)  ${}^kO, ({}^kx, {}^kz)$ : 原点を  $k$  本目の係留ラインのアンカー一点に置く空間固定座標 (係留ラインの運動)

### 2.2 係留浮体の運動方程式

係留浮体には、Fig. 2 に示すようなたて型円柱浮体を取扱い、問題を簡単化するために、波の進行方向に2本のチェーンで係留されるような2次元の問題を考える。従って、係留浮体の運動は、Surge, Heave および Pitch の3自由度のみの連成運動を考える。Fig. 2 に示すような係留浮体の運動方程式は、微小運動を仮定すると次のように表わせる。

$$\begin{aligned} & (M + A_{xx}) \cdot \ddot{x}(t) + N_{xx} \cdot \dot{x}(t) \\ & + \frac{1}{2} \rho C_{dx} \int_{-l_G}^{d-l_G} D(z_G) |z_G \cdot \dot{\theta}(t) + \dot{x}(t) \\ & - \xi(z_G, t) | \{z_G \cdot \dot{\theta}(t) + \dot{x}(t) - \xi(z_G, t)\} dz_G \\ & + A_{x\theta} \cdot \ddot{\theta}(t) + N_{x\theta} \cdot \dot{\theta}(t) - \sum_{k=1}^2 {}^kT_{xG} \\ & = F_{xG}(t) + F_{dG} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & (M + A_{zz}) \cdot \ddot{z}(t) + N_{zz} \cdot \dot{z}(t) \\ & + \frac{1}{2} \rho C_{dz} \cdot A_w | \dot{z}(t) - \dot{\eta}(-d, t) | \{ \dot{z}(t) \\ & - \dot{\eta}(-d, t) \} + C_{zz} \cdot z(t) - \sum_{k=1}^2 {}^kT_{zG} = F_{zG}(t) \end{aligned} \quad (2)$$

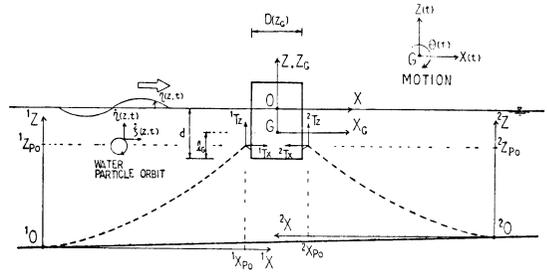


Fig. 1 Coordinate systems

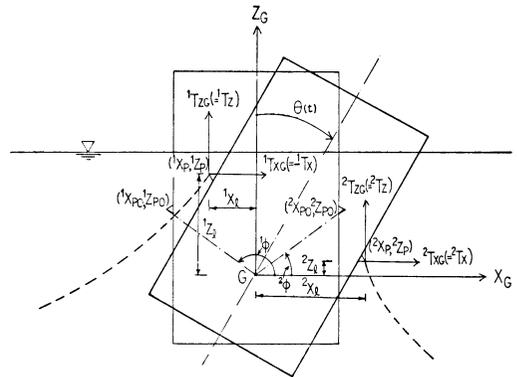


Fig. 2 Movement of the moored points due to pitch

$$\begin{aligned} & (I_\theta + A_{\theta\theta}) \cdot \ddot{\theta}(t) + N_{\theta\theta} \cdot \dot{\theta}(t) \\ & + \frac{1}{2} \rho C_{dx} \int_{-l_G}^{d-l_G} D(z_G) |z_G \cdot \dot{\theta}(t) + \dot{x}(t) \\ & - \xi(z_G, t) | \{z_G \cdot \dot{\theta}(t) + \dot{x}(t) - \xi(z_G, t)\} \cdot z_G \cdot dz_G \\ & + C_{\theta\theta} \cdot \theta(t) + A_{\theta x} \cdot \dot{x}(t) + N_{\theta x} \cdot \dot{x}(t) \\ & - \sum_{k=1}^2 ({}^kT_{zG} \cdot {}^kz_l - {}^kT_{xG} \cdot {}^kx_l) = F_{\theta G}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $x(t), z(t), \theta(t)$  は、それぞれ Surge, Heave, Pitch 運動を表わす。また、

- $M$ : 係留浮体の質量
- $I_\theta$ : 係留浮体の Pitch 方向慣性モーメント
- $A_{xx}, A_{zz}, A_{\theta\theta}$ : Surge, Heave, Pitch 方向付加質量および付加慣性モーメント
- $A_{x\theta}, A_{\theta x}$ : Pitch が Surge にあるいは Surge が Pitch に寄与する付加質量成分
- $N_{xx}, N_{zz}, N_{\theta\theta}$ : Surge, Heave, Pitch 方向造波抵抗係数
- $N_{x\theta}, N_{\theta x}$ : Pitch が Surge にあるいは Surge が Pitch に寄与する造波抵抗係数成分
- $C_{zz}, C_{\theta\theta}$ : Heave, Pitch 方向復元力係数
- $F_{xG}(t), F_{zG}(t), F_{\theta G}(t)$ : Surge, Heave, Pitch 方向強制力および重心回りモーメント
- $F_{dG}$ : 漂流力
- $\rho$ : 液体密度

$C_{dx}, C_{dz}$ : Surge, Heave 方向粘性抵抗係数

$A_w$ : 係留浮体の水線面積

$l_G$ : 係留浮体の底から重心までの距離

$d$ : ドラフト

$D(z_G)$ : 係留浮体の幅 (たて型円柱の場合は直径  $D$ )

${}^k T_{xG}, {}^k T_{zG}$ : 係留ライン  $k$  の  $x$  方向および  $z$  方向張力 (Fig. 2 参照)

${}^k x_i, {}^k z_i$ : 係留ライン  $k$  の浮体取付点における浮体重心  $G$  に対する  $x$  方向および  $z$  方向のレバー (Fig. 2 参照)

また,  $\eta(-d, t)$  および  $\xi(z_G, t)$  は波の粒子速度を表わし, 水粒子の垂直および水平方向運動をそれぞれ  $\eta(z, t), \xi(z, t)$  とすると, 次式で表わすことができる。

$$\eta(z, t) = \eta_0 \cdot e^{kz} \cdot \sin(-\omega t + \varepsilon_0) \quad (4)$$

$$\xi(z, t) = \eta_0 \cdot e^{kz} \cdot \cos(-\omega t + \varepsilon_0) \quad (5)$$

および

$$\dot{\eta}(z, t) = -\omega \eta_0 \cdot e^{kz} \cdot \cos(-\omega t + \varepsilon_0) \quad (6)$$

$$\dot{\xi}(z, t) = \omega \eta_0 \cdot e^{kz} \cdot \sin(-\omega t + \varepsilon_0) \quad (7)$$

ここで,  $\eta_0, \omega, \varepsilon_0, k$  はそれぞれ, 波の振幅, 周波数, 位相差および波数を示し, また  $z$  は水面を 0 とし, 上方方向を正とする空間固定座標系の垂直方向距離を表わす ( $z = z_G - d + l_G$ )。

### 2.3 係留ラインの運動方程式

係留ラインは, Fig. 5 に示すように,  $N$  等分に分割し各要素  $j$  の質量  $M_j$  および各要素に作用する力を 1 点に集中して考える。このようなモデル化は, 最初 Walton と Polachek<sup>6)</sup> によって示されたが, 以後多くの文献に採用されているモデル化である。また, 各質点間には, 重さのない直線ばねで結ばれているとして, 各質点の運動を計算することによって, 各質点間の張力を求めてゆく。まず, Fig. 3 に示すように, 各質点間の釣合式を考えると, 質点  $j$  の運動方程式は次式で与えられる (付録 A 参照)。

$$[M_j + A_{nj} \sin^2 \gamma_j + A_{tj} \cos^2 \gamma_j] \cdot \ddot{x}_j + [A_{tj} - A_{nj}] \cdot \ddot{z}_j \sin \gamma_j \cos \gamma_j = F_{xj} \quad (8)$$

$$[M_j + A_{nj} \cos^2 \gamma_j + A_{tj} \sin^2 \gamma_j] \cdot \ddot{z}_j + [A_{tj} - A_{nj}] \cdot \ddot{x}_j \sin \gamma_j \cos \gamma_j = F_{zj} \quad (9)$$

( $j=2, 3, \dots, N$ )

ここで,  $\ddot{x}_j, \ddot{z}_j$  はそれぞれ質点  $j$  の  $x$  方向および  $z$  方向の加速度,  $A_{nj}, A_{tj}$  は, 要素  $j$  の法線方向および接線方向の付加質量を示す。また Fig. 3 に示すように, 質点  $j$  に張力  $T_j, T_{j-1}$  および質点の水中重量  $\delta_j$  が作用している場合を考えると, 質点  $j$  に作用する  $x$  方向および  $z$  方向の外力  $F_{xj}, F_{zj}$  は次のように表わせる。

$$F_{xj} = T_j \cos \gamma_j - T_{j-1} \cos \gamma_{j-1} - f_{dxj} \quad (10)$$

$$F_{zj} = T_j \sin \gamma_j - T_{j-1} \sin \gamma_{j-1} - f_{dzj} - \delta_j \quad (11)$$

上式中,  $f_{dxj}, f_{dzj}$  は係留ラインの受ける抗力のそれぞれ

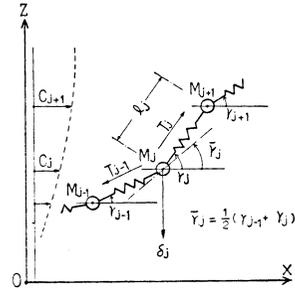


Fig. 3 Two dimensional model of lumped mass

れ  $x$  および  $z$  方向成分であり, 近似的に次式で与えられるとする。

$$f_{dxj} = -\frac{\rho}{2} D_c \bar{l} [C_{an} \sin \gamma_j |u_{nj}| u_{nj} - C_{at} \cos \gamma_j |u_{tj}| u_{tj}] \quad (12)$$

$$f_{dzj} = \frac{\rho}{2} D_c \bar{l} [C_{an} \cos \gamma_j |u_{nj}| u_{nj} + C_{at} \sin \gamma_j |u_{tj}| u_{tj}] \quad (13)$$

( $j=2, 3, \dots, N$ )

また,

$$u_{nj} = -(\dot{x}_j - c_j) \sin \gamma_j + \dot{z}_j \cos \gamma_j \quad (14)$$

$$u_{tj} = (\dot{x}_j - c_j) \cos \gamma_j + \dot{z}_j \sin \gamma_j \quad (15)$$

ここで,  $D_c$  は係留ラインの等価円断面の直径,  $C_{an}, C_{at}$  はそれぞれ法線方向および接線方向の抗力係数,  $c_j$  は潮流速度,  $\bar{l}$  はセグメント長さである。また一方, 各質点間には次式で示すような拘束条件式が存在する。

$$(x_j - x_{j-1})^2 + (z_j - z_{j-1})^2 = \bar{l}^2 \left( 1 + \frac{T_{j-1}}{A \cdot E} \right)^2 \quad (16)$$

( $j=2, 3, \dots, N+1$ )

ただし,  $A$  はチェーンの断面積,  $E$  はヤング率

### 2.4 係留浮体の運動および係留ライン張力の解析法

係留浮体の運動を求めるには, (1) 式~(3) 式を解けば良いが, ここでは次に示すような時間積分法の一つである Newmark- $\beta$  法を用いて時刻歴解析を行うことにする。いま,  $t=(n+1) \cdot \Delta t$  時の運動  $s^{n+1}$  および速度  $\dot{s}^{n+1}$  を Newmark- $\beta$  法によって表わすと次のように書ける。ただし,  $\Delta t$  は時間の刻み幅である。

$$s^{n+1} = s^n + \Delta t \cdot \dot{s}^n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{s}^n + \beta \cdot \Delta t^2 (\ddot{s}^{n+1} - \ddot{s}^n) \quad (17)$$

$$\dot{s}^{n+1} = \dot{s}^n + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{s}^{n+1} + \ddot{s}^n) \quad (18)$$

ここで  $\beta$  は,  $1/4$  とした。上式で,  $t=n \cdot \Delta t$  時の運動, 速度および加速度は即知である。一方, 運動  $s^{n+1}$  には, ここでは Surge ( $x^{n+1}$ ), Heave ( $z^{n+1}$ ) および Pitch ( $\theta^{n+1}$ ) を考える。上式中の  $\ddot{s}^{n+1}$  のかわりに,  $\ddot{x}^{n+1}, \ddot{z}^{n+1}$  および  $\ddot{\theta}^{n+1}$  を考えるが, これは, (1) 式~(3) 式より次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{n+1} = & \left[ F_{xG}^{n+1} + F_{dG} - N_{xx} \cdot \dot{x}^{n+1} \right. \\ & - \frac{1}{2} \rho C_{dx} \int_{-lG}^{d-lG} D(z_G) |z_G \cdot \dot{\theta}^{n+1} + \dot{x}^{n+1} \\ & - \dot{\xi}^{n+1}(z_G) \{z_G \cdot \dot{\theta} + \dot{x}^{n+1} - \dot{\xi}^{n+1}(z_G)\} dz_G \\ & \left. - A_{x\theta} \cdot \dot{\theta}^{n+1} - N_{x\theta} \cdot \dot{\theta}^{n+1} + \sum_{k=1}^2 {}^k T_{xG}^{n+1} \right] / \\ & \times (M + A_{xx}) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \ddot{z}^{n+1} = & \left[ F_{zG}^{n+1} - N_{zz} \cdot \dot{z}^{n+1} - \frac{1}{2} \rho C_{dz} \cdot A_w | \dot{z}^{n+1} \right. \\ & - \dot{\eta}^{n+1}(-d) \{ \dot{z}^{n+1} - \dot{\eta}^{n+1}(-d) \} \\ & \left. - C_{zz} \cdot \dot{z}^{n+1} + \sum_{k=1}^2 {}^k T_{zG}^{n+1} \right] / (M + A_{zz}) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}^{n+1} = & \left[ F_{\theta G}^{n+1} - N_{\theta\theta} \cdot \dot{\theta}^{n+1} \right. \\ & - \frac{1}{2} \rho C_{d\theta} \int_{-lG}^{d-lG} D(z_G) |z_G \cdot \dot{\theta}^{n+1} + \dot{x}^{n+1} \\ & - \dot{\xi}^{n+1}(z_G) \{z_G \cdot \dot{\theta}^{n+1} + \dot{x}^{n+1} \\ & - \dot{\xi}^{n+1}(z_G)\} \cdot z_G \cdot dz_G - C_{\theta\theta} \cdot \dot{\theta}^{n+1} - A_{\theta x} \cdot \ddot{x}^{n+1} \\ & \left. - N_{\theta x} \cdot \dot{x}^{n+1} + \sum_{k=1}^2 ({}^k T_{xG}^{n+1} \cdot {}^k z_l + {}^k T_{zG}^{n+1} \cdot {}^k x_l) \right] / \\ & \times (I_\theta + A_{\theta\theta}) \end{aligned} \quad (21)$$

ただし、 $t=0$  においては、全ての運動および速度は 0 であり、また加速度は次の通りである。

$$\ddot{x}^0 = (F_{xG}^0 + F_{dG}) / (M + A_{xx}) \quad (22)$$

$$\ddot{z}^0 = F_{zG}^0 / (M + A_{zz}) \quad (23)$$

$$\ddot{\theta}^0 = F_{\theta G}^0 / (I_\theta + A_{\theta\theta}) \quad (24)$$

$t=(n+1)\Delta t$  時の係留浮体の運動  $x^{n+1}$ ,  $z^{n+1}$ ,  $\theta^{n+1}$  を計算するには、まず最初にこれらの適当な値を仮定し、(19)~(21) 式によって  $t=(n+1)\Delta t$  時の加速度を求め、そして (17) および (18) 式を利用して求めるわけであるが、これらの式が十分な精度で満足するまで繰返し計算を行う。一方、(19)~(21) 式において、未知な値として、係留ラインの  $t=(n+1)\Delta t$  時の張力  ${}^k T_{xG}^{n+1}$  および  ${}^k T_{zG}^{n+1}$  があるが、これらは係留浮体の  $t=(n+1)\Delta t$  時の運動が分っている必要があるため、これも繰返し計算によって求める必要がある。

Fig. 2 において、 $t=(n+1)\Delta t$  時の運動  $x^{n+1}$ ,  $z^{n+1}$ ,  $\theta^{n+1}$  が分っているとすると、係留ラインの浮体取付点の位置は、各係留ラインの空間固定座標で次のように表わせる。

$${}^1 x_p = {}^1 x_{p0} + x(t) + l \{ \cos({}^1 \phi - \theta(t)) - \cos({}^1 \phi) \} \quad (25)$$

$${}^1 z_p = {}^1 z_{p0} + z(t) + l \{ \sin({}^1 \phi - \theta(t)) - \sin({}^1 \phi) \} \quad (26)$$

$${}^2 x_p = {}^2 x_{p0} - x(t) - l \{ \cos({}^2 \phi - \theta(t)) - \cos({}^2 \phi) \} \quad (27)$$

$${}^2 z_p = {}^2 z_{p0} + z(t) + l \{ \sin({}^2 \phi - \theta(t)) - \sin({}^2 \phi) \} \quad (28)$$

上式で、 ${}^k x_{p0}$  および  ${}^k z_{p0}$  は、それぞれ  ${}^k x_p$  および  ${}^k z_p$  の  $t=0$  時の時の値を示し、また  $l$  は、浮体重心より係留ラインの浮体取付点までの距離を示す。

さて  $t=n \cdot \Delta t$  時の係留ラインの上端の点 ( ${}^k x_p^n$ ,  ${}^k z_p^n$ ) が次の時間ステップで ( ${}^k x_p^{n+1}$ ,  ${}^k z_p^{n+1}$ ) に移動することによって、各要素間の張力  ${}^k T_j^n$  が  ${}^k T_j^{n+1}$  に変化する場合を考える。以下では簡単のために、係留ラインの 1 本について考えることにし、肩字の  $k$  を省略する。 $t=(n+1)\Delta t$  時の張力  $T_j^{n+1}$  は、Walton らの方法<sup>6)</sup> にならって Newton-Raphson 法によって求める。いま、 $T_j^{n+1}$  に充分近い値  $\tilde{T}_j^{n+1}$  を考え、その差を  $\Delta T_j^{n+1}$  とすると、

$$T_j^{n+1} = \tilde{T}_j^{n+1} + \Delta T_j^{n+1} \quad (29)$$

と表わすことができ、さらに  $\Delta T_j^{n+1}$  は次式によって求める (付録 B 参照)。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \Delta T_1^{n+1} \\ \Delta T_2^{n+1} \\ \Delta T_3^{n+1} \\ \vdots \\ \Delta T_N^{n+1} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} -\tilde{F}_2^{n+1} & \tilde{G}_2^{n+1} & & & \\ \tilde{E}_3^{n+1} & -\tilde{F}_3^{n+1} & \tilde{G}_3^{n+1} & & \\ & \tilde{E}_4^{n+1} & -\tilde{F}_4^{n+1} & \tilde{G}_4^{n+1} & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \tilde{E}_{N+1}^{n+1} & -\tilde{F}_{N+1}^{n+1} \end{bmatrix}^{-1} \\ & \quad \cdot \begin{bmatrix} -\tilde{\phi}_2^{n+1} \\ -\tilde{\phi}_3^{n+1} \\ -\tilde{\phi}_4^{n+1} \\ \vdots \\ -\tilde{\phi}_{N+1}^{n+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

ここで、

$$\tilde{E}_j^{n+1} = \tilde{P}_{j-1}^{n+1} (\tilde{x}_j^{n+1} - \tilde{x}_{j-1}^{n+1}) + \tilde{Q}_{j-1}^{n+1} (\tilde{z}_j^{n+1} - \tilde{z}_{j-1}^{n+1}) \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_j^{n+1} = & (\tilde{P}_j^{n+1} + \tilde{R}_j^{n+1}) (\tilde{x}_j^{n+1} - \tilde{x}_{j-1}^{n+1}) \\ & + (\tilde{Q}_j^{n+1} + \tilde{S}_j^{n+1}) (\tilde{z}_j^{n+1} - \tilde{z}_{j-1}^{n+1}) \\ & + 2l^2 (1 + \tilde{T}_j^{n+1} / E \cdot A) / E \cdot A \end{aligned} \quad (32)$$

$$\tilde{G}_j^{n+1} = \tilde{R}_j^{n+1} (\tilde{x}_j^{n+1} - \tilde{x}_{j-1}^{n+1}) + \tilde{S}_j^{n+1} (\tilde{z}_j^{n+1} - \tilde{z}_{j-1}^{n+1}) \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_j^{n+1} = & -l^2 (1 + \tilde{T}_{j-1}^{n+1} / E \cdot A)^2 + (\tilde{x}_j^{n+1} - \tilde{x}_{j-1}^{n+1})^2 \\ & + (\tilde{z}_j^{n+1} - \tilde{z}_{j-1}^{n+1})^2 \end{aligned} \quad (34)$$

$(j=2, 3, \dots, N+1)$

また、

$$\begin{aligned} \tilde{x}_j^{n+1} = & \frac{5}{2} x_j^n - 2x_{j-1}^n - \frac{1}{2} x_{j-2}^n \\ & + [\tilde{R}_j^{n+1} \cdot \tilde{T}_j^{n+1} - \tilde{P}_j^{n+1} \cdot \tilde{T}_{j-1}^{n+1} + \tilde{U}_j^{n+1}] / 2 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \tilde{z}_j^{n+1} = & \frac{5}{2} z_j^n - 2z_{j-1}^n - \frac{1}{2} z_{j-2}^n \\ & + [\tilde{S}_j^{n+1} \cdot \tilde{T}_j^{n+1} - \tilde{Q}_j^{n+1} \cdot \tilde{T}_{j-1}^{n+1} + \tilde{V}_j^{n+1}] / 2 \end{aligned} \quad (36)$$

$$(j=2, 3, \dots, N)$$

上式中、 $\bar{S}_j^{n+1}, \bar{R}_j^{n+1}, \bar{P}_j^{n+1}, \bar{Q}_j^{n+1}, \bar{U}_j^{n+1}, \bar{V}_j^{n+1}$  は、付録 B より導く。 $E$  は係留ラインのヤング率、 $A$  は断面積である。また、係留ラインの上端の点 ( $\bar{x}_{N+1}^n, \bar{z}_{N+1}^n$ ) は、( $x_p^{n+1}, z_p^{n+1}$ ) であるが、計算の都合上、時間の経過と共にしだいに正しい値の大きさに近づくように次式で計算する。

$$\bar{x}_{N+1}^n = x_p^{n+1} [1 - \exp(-\omega t/4)] \quad (37)$$

$$\bar{z}_{N+1}^n = z_p^{n+1} [1 - \exp(-\omega t/4)] \quad (38)$$

計算の手順としては、まず適当に張力  $T_N^{n+1}$  の水平および垂直方向成分 ( $T_{zg}^{n+1}, T_{zg}^{n+1}$ ) を仮定して  $t = (n+1)\Delta t$  時の係留浮体の運動を求め、(25)~(28) 式より ( $x_p, z_p$ ) を各係留ラインについて計算する。また、(37) および (38) 式より係留ライン上端の点の移動を求め、(29) および (30) 式を繰返し計算することによって  $T_j^{n+1}$  を求める。この際、 $T_j^{n+1}$  の初期値には、 $T_j^n$  の値を用いるが、 $t=0$  時における張力  $T_j^0$  は、静的状態の張力を計算して用いる (文献 7) 参照。 $T_j^{n+1}$  が分れば、その  $x$  方向および  $z$  方向成分を計算し、(17)~(21) 式より係留浮体の運動を求める。以下、 $t = (n+1)\Delta t$  時の係留浮体の運動の計算が収束すれば、次の時間ステップを順次計算してゆく。

### 3 係留浮体の実験および理論解析

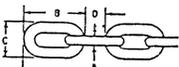
#### 3.1 実験の概要

水槽実験は、水深 3.0m の東京大学本郷水槽において、Fig. 4 に示すように、2本の係留ラインによって係

留された円柱浮体について行った。また実験の種類としては、係留された浮体のほかに、係留ラインの影響を調べる目的で無係留の状態についても実験を行った。係留浮体には、直径 32cm、高さ 41.2cm の塩化ビニール製たて型円柱模型を使用した。その主要項目を Table 1 に示す。一方、係留ラインには、市販されているスタッドのない鉄製チェーンを用いており、主要項目を Table 2 に示す。なお、模型の縮尺としては 1:20 を想定している。

実験状態は、波高 6cm、波周期 0.8 秒~2.5 秒の規則波中を考え、係留状態は、水平方向初期張力 3.27 kg、垂直方向初期張力 1.98 kg のややスラックな状態の 1 ケ

Table 2 Principal particulars of moored chain



Diameter	A	3.5 mm
Length	B	34.5 mm
Breadth	C	15.5 mm
Weight per length in Water	$W_w$	0.1538 Kg/m
Weight per length in Air	$W_A$	0.222 Kg/m
Ave. Diameter	$D_c$	5.99 mm
Volume per length	V	23.2 cm <sup>3</sup> /m

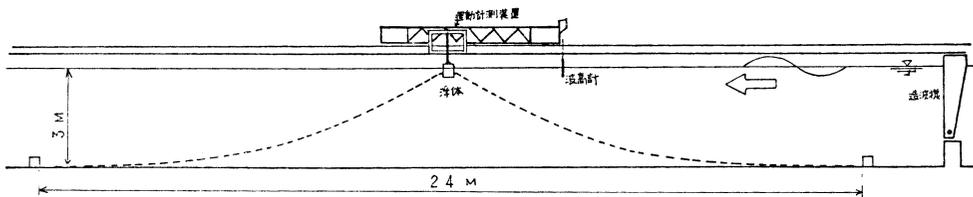
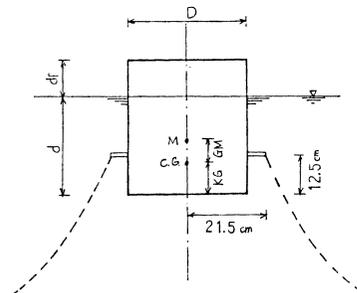


Fig. 4 Experimental condition of the moored body

Table 1 Principal particulars of moored body  
( ) indicates non-moored condition

Diameter	D	32 cm
Draft	d	30 cm(24.4 cm)
Freeboard	df	11.2 cm(16.8 cm)
Weight	W	19.6 Kg
KG		10.6 cm
GM		6.53 cm
Radius of Gyration		17.2 cm
Natural Period		
SURGE		3.1 sec
HEAVE		1.4 sec(1.19 sec)
PITCH		1.3 sec(1.83 sec)



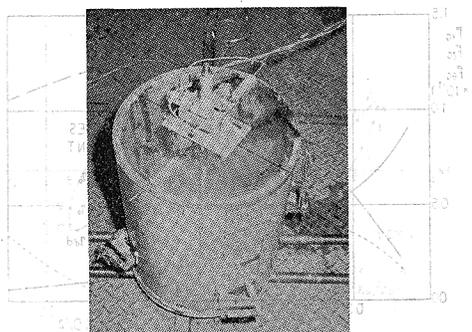


Photo. 1 Model of the moored body

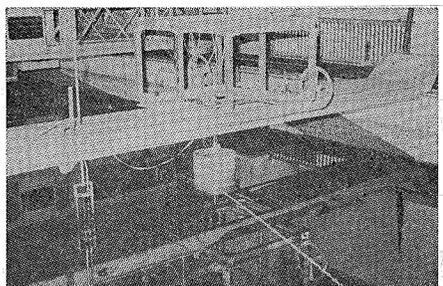


Photo. 2 Motion measuring equipment and moored body

ースのみについて実験を行った。計測は、浮体の Surge, Heave および Pitch 運動, 2 箇所の係留チェーンの浮体取付点における水平および垂直方向張力そして波高計測の 9 項目について行い, ビジグラフとデータレコーダーに記録させた。波高計は 2 本用意し, 1 本は浮体運動との位相差を見るために浮体の真横に, もう 1 本は浮体から充分離れた位置に取付けて波高を測定した。張力測定の検力計は, Photo. 1 に示すような L 字型 4 枚ゲージの検力計で浮体に固定されている。係留浮体の運動計測器を Photo. 2 に示す。

### 3.2 理論解析の概要

第 2 節で係留浮体および係留ラインの動的解析法について述べて来たが, ここではこの方法による計算例を実験結果と比較する。まず Fig. 1 に示すような円柱浮体の運動および係留ラインの動的挙動の時刻歴解析ならびに周波数解析を行うが, 紙面の都合上, 前者については波周期が 1.3 秒のものと 2.0 秒のものについて解析する。

係留ラインは, Fig. 5 に示すように 9 分割 ( $N=9$ ) でそれぞれのラインを分割し, 0.01 秒毎 (計算時間刻み幅) に各質点の運動および張力を計算している。係留ラインの初期状態における各質点の  $x$  座標,  $z$  座標および張力を文献 7) で示した方法で求め, Table 3 に示す。計算で用いた係留チェーンのヤング率 ( $E$ ) は,  $2.15 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>, またチェーンの流体力係数は, 別に質量の軽いプラスチック製模型で行った強制運動実験による値

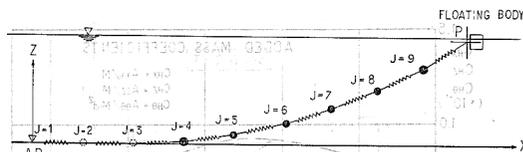


Fig. 5 Lumped mass model of mooring line

Table 3 Location and tension of each segment of mooring line

X (m)	Z (m)	T (Kg)
X (1) = 0.0	Z (1) = 0.0	T (1) = 3.2697267
X (2) = 1.3751112	Z (2) = 0.0	T (2) = 3.2697267
X (3) = 2.7502223	Z (3) = 0.0	T (3) = 3.2717466
X (4) = 4.1244845	Z (4) = 0.0483126	T (4) = 3.3099881
X (5) = 5.4820693	Z (5) = 0.2621382	T (5) = 3.3617510
X (6) = 6.8203383	Z (6) = 0.5816807	T (6) = 3.4334761
X (7) = 8.1298676	Z (7) = 1.0012802	T (7) = 3.5239450
X (8) = 9.4057779	Z (8) = 1.5140995	T (8) = 3.6317570
X (9) = 10.6438116	Z (9) = 2.1126003	T (9) = 3.8227203
X (10) = 11.8199995	Z (10) = 2.8249995	T (10) = 0.0

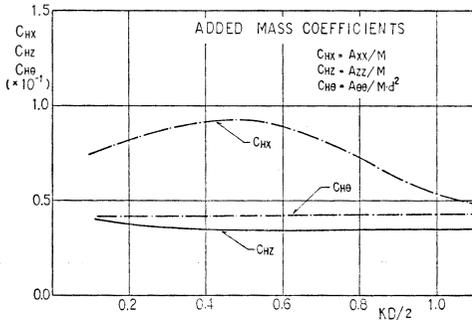
を用いた。その結果, 抗力係数は法線方向, 接線方向がそれぞれ,  $C_{an}$  (法線方向抗力/ $(4/3\pi)\rho \cdot D_c \cdot \bar{l} \cdot u^2$ ) = 2.18,  $C_{at}$  (接線方向抗力/ $(4/3\pi)\rho \cdot D_c \cdot \bar{l} \cdot u^2$ ) = 0.17, また付加質量係数は, 法線方向および接線方向がそれぞれ,  $C_{hn}$  (法線方向付加質量/ $\rho \cdot D_c^2 \pi \bar{l} / 4$ ) = 1.98,  $C_{ht}$  (接線方向付加質量/ $\rho \cdot D_c^2 \pi \bar{l} / 4$ ) = 0.2 であった。一方, 係留浮体の流体力係数および流体力は, 3 次元特異点分布法 (文献 8) 参照) で求めたが, それらを Fig. 6 に示す。図中,  $K$  は波数,  $D$  は円柱の直径を示す。

### 3.3 計算値と実験値の比較

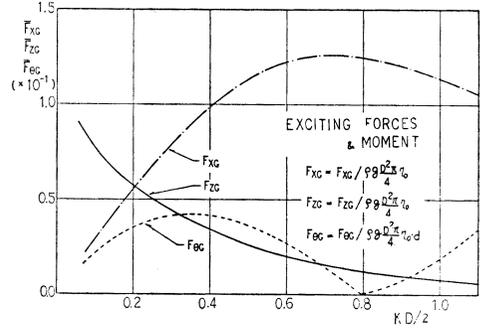
#### (1) 係留浮体の運動

Fig. 7 に本計算法による係留浮体の Surge, Heave, Pitch 運動の時刻歴解析結果を示す。図中, Wave と示してある線が浮体中心における入射波形を示している。丸印, 四角印, 三角印は, 実験値を示しているが, 計算値と良好に一致していることが分る。これらの運動は浮体の上部部におけるものであるが, 今度は, 係留ラインの浮体取付点における運動をプロットしたものを Fig. 8 に示す。これらの図から, Weather side 側と Lee side 側では, かなり運動の状態が異なっていることが分る。特に周期が 1.3 秒の結果では, Weather side 側と Lee side 側とでは運動が逆向きに回っている興味ある結果を示している。一方, 係留ラインの変動張力に与える影響から考えると, Weather side 側の方は, 浮体取付点の運動が, 係留ラインの接線方向に向っているのに対し, Lee side 側では逆に法線方向に向っている。これによって, Weather side 側の変動張力は, Lee side 側に比べて大きくなる傾向にあることが予想される。

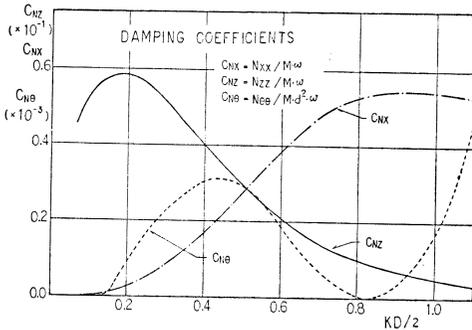
次に円柱上部部における Surge, Heave, Pitch 運動の無係留時および係留時の周波数特性を Fig. 9 に示す。こ



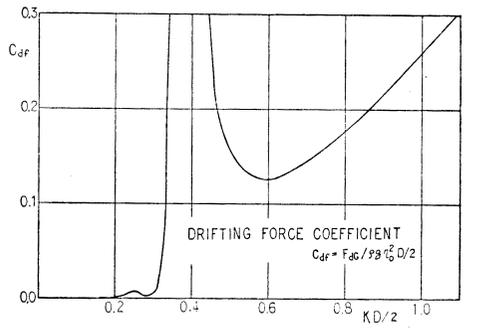
6-1



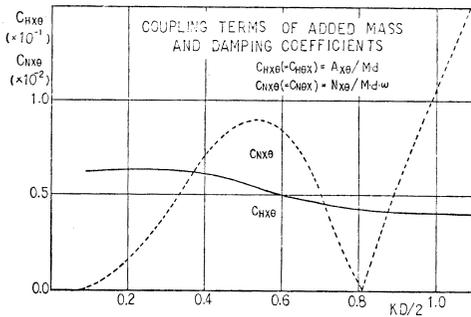
6-4



6-2

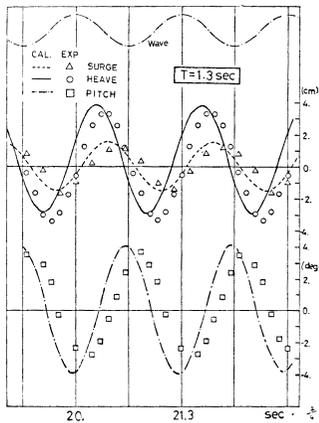


6-5

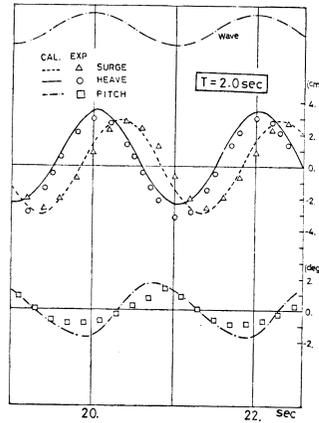


6-3

Fig.6 Hydrodynamic coefficients and excitations of the moored body (draft=30 cm)



7-1



7-2

Fig.7 Motions of the moored body in waves (Wave height=6cm)

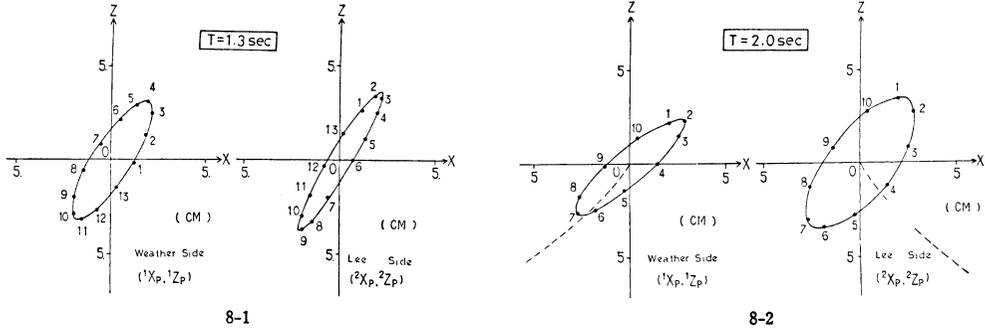


Fig. 8 Motions of the top of the mooring lines

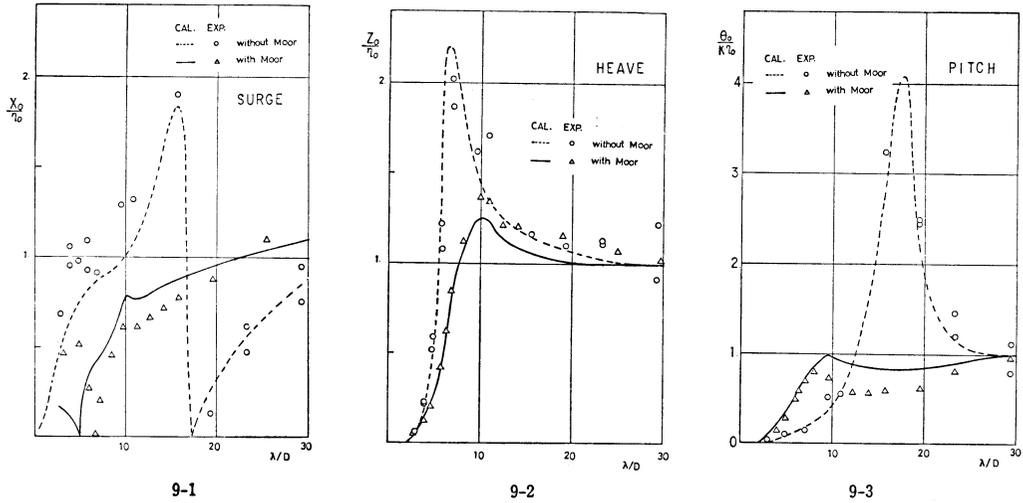


Fig. 9 Response functions of the moored and non-moored body

これらの図より、どの運動も係留ラインによって、かなり運動特性が変化していることが理論値および実験値より分る。全体的には、係留ラインが付くことによって運動が小さくなる傾向がある。

Fig. 10 は、係留ラインの復元力特性を Surge 方向について調べたものであるが、運動の範囲から考えて、ほぼ線形の復元力特性になっていることが分る。従って、Fig. 9 のように係留浮体の運動がこのように異なる理由は、この場合係留ライン復元力の非線形性によるものでないと言える。

(2) 係留ラインに働く変動張力

次に係留浮体が波浪中に運動している際に係留ラインに働く張力の変化について考察する。係留浮体が、Fig. 7 のように運動している時に、係留ラインの取付点は Fig. 8 のように運動することは既に述べたが、この時の係留浮体取付点に働く変動張力の波形解析を行ったものが、Fig. 11 および Fig. 12 である。図中、 $T_{HW}$  および  $T_{VW}$  は、それぞれ浮体の Weather side 側の水平および垂直方向変動張力を表わし、また  $T_{HL}$  および  $T_{VL}$

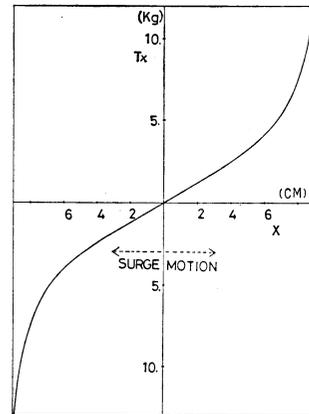
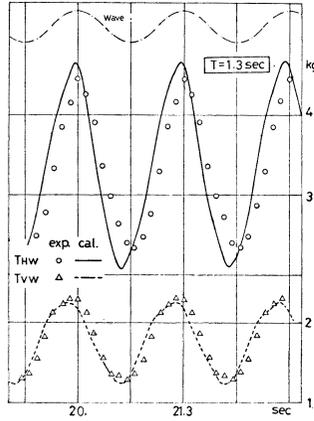
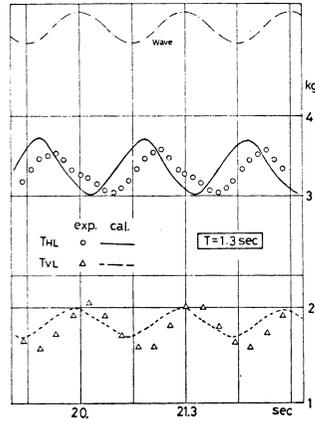


Fig. 10 Curve of mooring restoration in surge

は、Lee side 側の水平および垂直方向変動張力の値を表わす(ただし、これらの値は浮体固定座標系の値である)。Fig. 11, Fig. 12 ともに本法による理論値は実験値を良く説明しているが、特に波形が酷似している。またこれらの図より、Weather side 側の変動張力は Lee

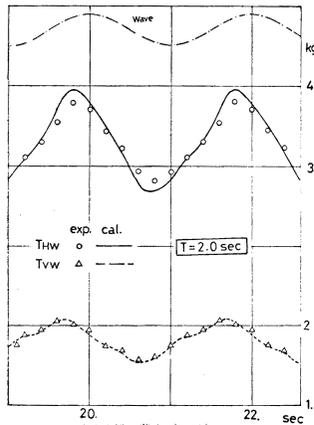


11-1

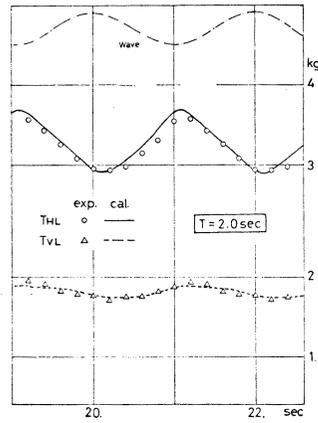


11-2

Fig. 11 Dynamic tensions of the mooring lines at the moored points ( $T=1.3$  sec.)

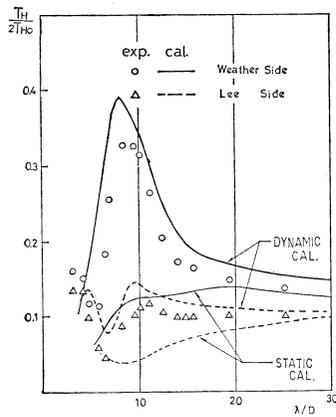


12-1

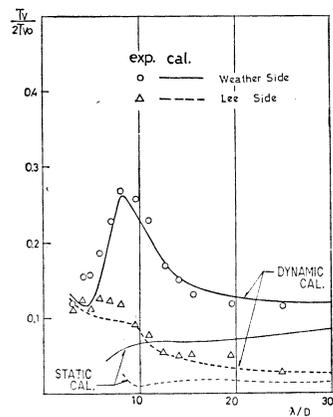


12-2

Fig. 12 Dynamic tensions of the mooring lines at the moored points ( $T=2.0$  sec.)



13-1



13-2

Fig. 13 Non-dimensional dynamic tensions of the mooring lines ( $T_{H0}=3.27$  kg,  $T_{V0}=1.98$  kg)

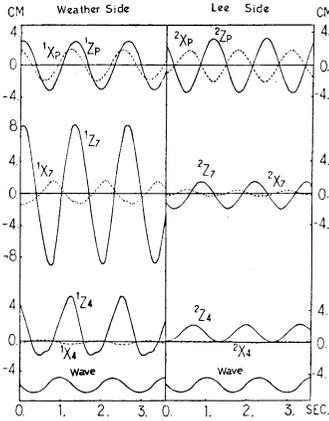


Fig. 14 Horizontal and vertical motions of mooring lines at  $j=4, 7$  and  $P$  ( $T=1.3$  sec.)

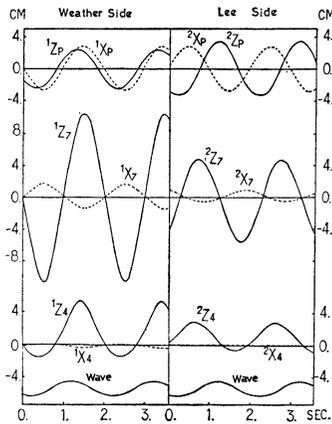


Fig. 15 Horizontal and vertical motions of mooring lines at  $j=4, 7$  and  $P$  ( $T=2.0$  sec.)

side 側と比較してかなり大きくなること分るが、これは前述したように係留浮体取付点の運動が、Weather side 側と Lee side 側とで異なることによる。Fig. 13 に変動張力の周波数特性を示す。図中、 $T_H$  および  $T_V$  は、変動張力の水平および垂直方向（係留浮体固定座標系による）の両振幅を意味し、それぞれの初期張力  $T_{H0}$  (3.27 kg),  $T_{V0}$  (1.98 kg) で無次元化してある。同図において、長い周期においては係留ラインの動的効果があるため、Weather side 側、Lee side 側ともにほぼ一定の変動張力の値（準静的な状態における張力変化分）になっているが、周期が短くなるに従って係留ラインの動的効果が大きくなり、変動張力は増大している。特に Heave および Pitch 運動の同調付近で変動張力は最大となるが、浮体運動の減少によって今度は急速に小さくなって行く傾向が良く分る。

(3) 係留ラインの運動

係留ラインの浮体取付点の運動が、Fig. 8 のように運

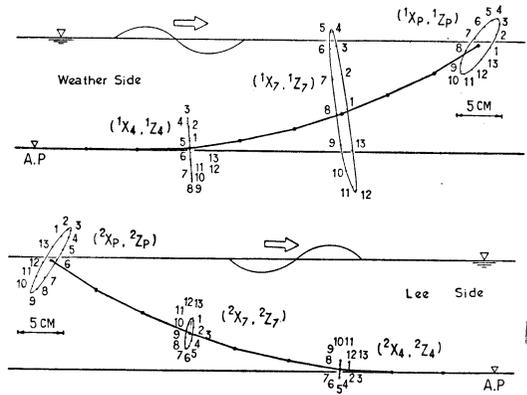


Fig. 16 Motion of mooring lines ( $T=1.3$  sec.)

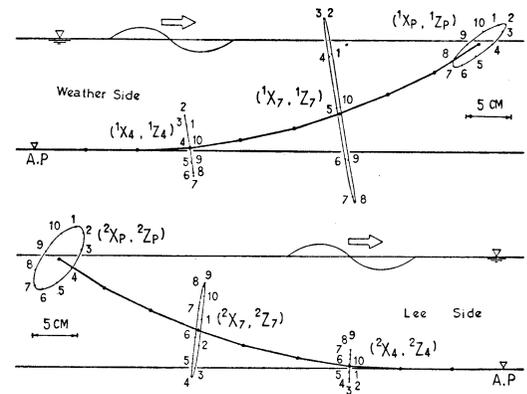


Fig. 17 Motion of mooring lines ( $T=2.0$  sec.)

動している際に、引起されている係留ラインの  $x$  方向および  $z$  方向運動を Fig. 14 ( $T=1.3$  秒), Fig. 15 ( $T=2.0$  秒) に示す。同図において、一番上が係留ラインの浮体取付点  $p$  の運動、その下が  $j=7$  の点、その下が  $j=4$  の点の運動を示す。また一番下の Wave とあるのは、浮体中心における入射波形を示している。Fig. 14, 15 と  $j=7$  の点の上下方向運動がかなり大きくなっているが変動張力の大きい  $T=1.3$  秒の方の運動が  $T=2.0$  秒に比べて小さくなっている。従って、係留ラインの運動の大きさは必ずしも変動張力の大きさとは比例しないことが分る。Fig. 16 および Fig. 17 は、Fig. 14 および Fig. 15 を  $x-z$  座標上にプロットしたものである。前者は 0.1 秒毎に、また後者は 0.2 秒毎にプロットされており、番号の方向に各質点が運動している。また 1 の番号は、係留浮体中心に波の山が来た時の各質点の位置を示しており、縮尺においては係留ライン運動の縮尺は誇張されて表わされ、係留ライン長さおよび水深の縮尺と一致させていない。

4 結 言

以上、係留ラインの係留浮体に与える影響が大きい場

合における係留浮体の運動，係留ラインの運動，係留ラインに働く変動張力の新しい理論解析法の紹介および解析結果を実験と比較して考察して来た。全体的に，本解析法による結果は，実験と良好に一致しており本解析法の有効性が確認できたと考える。また，今回の解析より，係留浮体の規模によっては，係留ラインが浮体運動に与える影響は非常に大きくなるのが，浮体運動の応答特性から分った。その原因としては，係留復元力が線形性を保っていることから，従来からよく言われているような復元力の非線形影響によるものでなく，今回の解析からその理由が係留ラインの動的効果によるものであることが分った。このように係留ラインに働く変動張力は，係留浮体の運動などに影響を与えるわけで，係留ラインの動的解析は重要なことであると言える。特に，周期が短い所では，係留ラインに働く変動張力は，急激に増大し，係留浮体の運動に与える影響大きい。また，係留浮体の運動と係留ラインに働く変動張力の間には，複雑な相互干渉効果が働き，結果的には浮体運動を少なくする傾向が見られた。しかしながら，さらに短い周期になると，今度は浮体自身の受ける流体力が小さくなり，運動が小さくなるので変動張力は急激に減少してゆく。また，係留ラインの運動解析から，係留ラインの運動が大きいことは必ずしも変動張力が大きいことを意味しないことが分った。また，係留ラインに働く変動張力は，Weather side 側が Lee side 側に比べてかなり大きいことが，理論解析および実験解析から確かめられた。

本法は，係留ラインの動的効果を考慮して係留浮体の運動や係留ラインの動的挙動を探ることができるが，1) 非対称に係留された係留浮体の場合の計算，2) 係留ラインの中間にブイやシンカーなどが付く場合の計算，3) 不規則波中の動的解析，4) 係留ラインが切断された時の係留浮体の挙動の計算等が比較的容易にできる汎用性の利点があげられる。

また，計算時間については，1ステップに要する計算時間が今回の計算で，約0.008秒～0.0020秒（HITAC M-200 H）である。ある特定の一つの周期の問題につき，今回の計算では2500ステップ（ $T=1.3$ 秒が20周期， $T=2.0$ 秒が10周期）計算しているので，合計の計算時間では約20～50秒程度であった。

謝 辞

最後に，本研究を進めるに当って，東京大学大学院研究生 堀田 平氏には，実験および解析において多大な御協力を得ましたことを記して謝意を表します。

参 考 文 献

1) 日本船用機器開発協会：大型浮遊式海洋構造物の

調査研究事業報告書，-48-54（1974.3）.

2) 日本船用機器開発協会：大型浮遊式海洋構造物の調査研究事業報告書，49-41（1975.3）.

3) 高木又男，新井信一，榎野佳子：係留浮体の規則波中の運動に関する理論計算，日本造船学会講演論文，日本造船学会（1974）.

4) 小寺山 亘：係留浮体の運動と係留鎖張力について，西部造船学会会報，第53号（1977）.

5) 島田 潔，小林正典，日根野元裕：係留ラインの張力に対する動的影響について，西部造船学会会報，第60号（1980）pp.113～127.

6) Walton, J. S., Polachek, H.: Calculation of Transient Motions of Submerged Cables, Mathematics of Computation, Vol. xiv, 69～72（1960）.

7) 中嶋俊夫，元良誠三，藤野正隆：特殊係留ラインの動的特性について，第5回海洋工学シンポジウム，日本造船学会（1981.1）.

8) 小林一也：直立円柱に働く波浪漂流力に関する研究，東京大学船舶工学科修士論文（1979.3）.

9) 中嶋俊夫：質点系モデルによる各種係留ラインの動的解析に関する研究，東京大学船舶工学科博士論文（1980.12）.

付 録 A

Fig. 18 に示すように，係留ライン要素  $j$  が  $\ddot{x}_j$  および  $\ddot{z}_j$  なる加速度を持つとすると，これらの加速度による法線方向加速度  $a_{nj}$  および接線方向加速度  $a_{tj}$  は，

$$a_{nj} = -\ddot{x}_j \sin \gamma_j + \ddot{z}_j \cos \gamma_j \quad (39)$$

$$a_{tj} = \ddot{x}_j \cos \gamma_j + \ddot{z}_j \sin \gamma_j \quad (40)$$

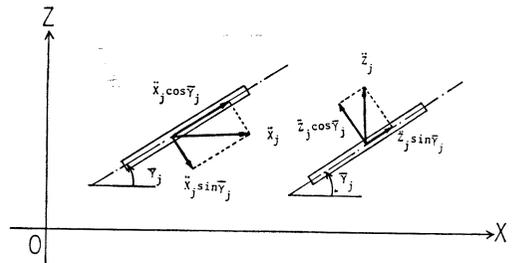


Fig. 18 Tangential and normal components of accelerations  $\ddot{x}_j$  and  $\ddot{z}_j$

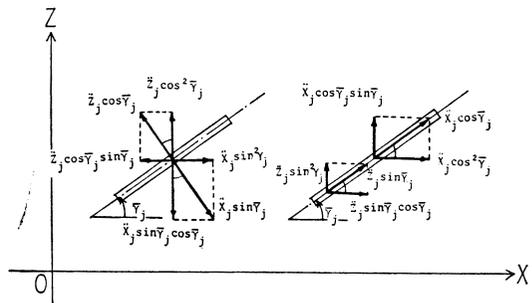


Fig. 19 Horizontal and vertical components of normal and tangential inertia forces

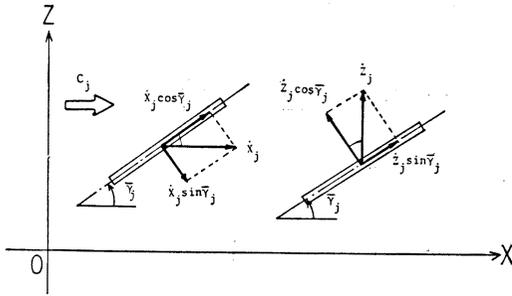


Fig. 20 Tangential and normal components of velocities  $\dot{x}_j$  and  $\dot{z}_j$

となり、また、法線方向、接線方向の付加質量をそれぞれ、 $A_{nj}$ ,  $A_{tj}$  とすると、法線方向に働く付加質量力の  $x$  方向 ( $f_{nxxj}$ ) および  $z$  方向成分 ( $f_{nzzj}$ ) は次のようになる (Fig. 19 参照)。

$$f_{nxxj} = A_{nj}[\ddot{x}_j \sin^2 \gamma_j - \ddot{z}_j \cos \gamma_j \sin \gamma_j] \quad (41)$$

$$f_{nzzj} = A_{nj}[\ddot{z}_j \cos^2 \gamma_j - \ddot{x}_j \cos \gamma_j \sin \gamma_j] \quad (42)$$

同様に、接線方向に働く付加質量力の  $x$  方向 ( $f_{txxj}$ ) および  $z$  方向成分 ( $f_{tzj}$ ) は次のようになる (Fig. 19 参照)。

$$f_{txxj} = A_{tj}[\ddot{x}_j \cos^2 \gamma_j + \ddot{z}_j \sin \gamma_j \cos \gamma_j] \quad (43)$$

$$f_{tzj} = A_{tj}[\ddot{z}_j \sin^2 \gamma_j + \ddot{x}_j \sin \gamma_j \cos \gamma_j] \quad (44)$$

次に粘性抗力について同様の定式化を行う。まず係留ライン要素  $j$  が  $\dot{x}_j$  および  $\dot{z}_j$  の速度を持つとすると、これらの速度による法線方向 ( $u_n$ ) および接線方向の速度 ( $u_t$ ) は、Fig. 20 より (14) 式および (15) 式のように書くことができるので (Fig. 20 参照)、粘性抗力の  $x$  方向 ( $f_{axj}$ ) および  $z$  方向成分 ( $f_{azj}$ ) は、(12) 式、(13) 式のようになる。

以上の式より、係留ライン要素  $j$  の 2 次元運動方程式は、張力  $T_j$  および係留要素の質量  $M_j$  および重量  $\delta_j$  を考慮することによって (8) 式、(9) 式のように書くことができる。

### 付 録 B

(8) 式および (9) 式を  $\ddot{x}_j$  および  $\ddot{z}_j$  についてまとめ次式のようにする。

$$\ddot{x}_j = (R_j T_j - P_j T_{j-1} + U_j) / \Delta t^2 \quad (45)$$

$$\ddot{z}_j = (S_j T_j - Q_j T_{j-1} + V_j) / \Delta t^2 \quad (46)$$

$$(i=2, 3 \dots N)$$

ただし、

$$\begin{aligned} I_1 &= M_j + A_{nj} \sin^2 \gamma_j + A_{tj} \cos^2 \gamma_j \\ I_2 &= [A_{tj} - A_{nj}] \sin \gamma_j \cos \gamma_j \\ I_3 &= M_j + A_{nj} \cos^2 \gamma_j + A_{tj} \sin^2 \gamma_j \\ R_j &= \Delta t^2 [I_3 \cdot \cos \gamma_j - I_2 \sin \gamma_j] / \lambda \\ P_j &= \Delta t^2 [I_3 \cdot \cos \gamma_{j-1} - I_2 \cdot \sin \gamma_{j-1}] / \lambda \\ S_j &= \Delta t^2 [I_1 \cdot \sin \gamma_j - I_2 \cdot \cos \gamma_j] / \lambda \\ Q_j &= \Delta t^2 [I_1 \cdot \sin \gamma_{j-1} - I_2 \cdot \cos \gamma_{j-1}] / \lambda \\ U_j &= \Delta t^2 [I_2 (f_{axj} + \delta_j) - I_3 f_{axj}] / \lambda \\ V_j &= \Delta t^2 [I_2 (f_{azj} - I_1 (f_{azj} + \delta_j))] / \lambda \\ \lambda &= I_1 \cdot I_3 - I_2^2 \end{aligned} \quad (47)$$

係留ラインの運動を支配する方程式は、(8) 式および (9) 式がそれぞれ  $(N-1)$  個、(16) 式が  $N$  個存在する。

一方、未知数としては、 $x_j, z_j$  がそれぞれ  $(N-1)$  個、張力  $T_j$  が  $N$  個存在する。従って、差分公式等によって  $\dot{x}_j, \dot{z}_j, \ddot{x}_j, \ddot{z}_j$  が  $x_j, z_j$  で表わすことができればこの問題は解けることになる。ここでは、Houbolt 法による差分公式を用いて定式化してゆくが、ここでは Houbolt 法についての詳細は省略する。

ある関数  $s_j$  の  $(t-2\Delta t)$ ,  $(t-\Delta t)$ ,  $(t)$ ,  $(t+\Delta t)$  時の値が分かっているとすると、 $s_j$  の加速度 ( $\dot{s}_j$ ) および速度 ( $\ddot{s}_j$ ) は次式で与えられる。

$$\dot{s}_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta t^2} (2s_j^{n+1} - 5s_j^n + 4s_j^{n-1} - s_j^{n-2}) \quad (49)$$

$$\ddot{s}_j^{n+1} = \frac{-1}{6\Delta t} (2s_j^{n-2} - 9s_j^{n-1} + 18s_j^n - 11s_j^{n+1}) \quad (50)$$

(49) 式中の  $s_j$  を  $x_j, z_j$  と考え、(45) 式、(46) 式と組合せることにより次式を得る。

$$\begin{aligned} x_j^{n+1} &= \frac{5}{2} x_j^n - 2x_j^{n-1} + \frac{1}{2} x_j^{n-2} \\ &+ (R_j^{n+1} \cdot T_j^{n+1} - P_j^{n+1} \cdot T_{j-1}^{n+1} + U_j^{n+1}) / 2 \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} z_j^{n+1} &= \frac{5}{2} z_j^n - 2z_j^{n-1} + \frac{1}{2} z_j^{n-2} \\ &+ (S_j^{n+1} \cdot T_j^{n+1} - Q_j^{n+1} \cdot T_{j-1}^{n+1} + V_j^{n+1}) / 2 \end{aligned} \quad (52)$$

いま、次式に示すような関数  $\phi_j^{n+1}$  を考える。

$$\begin{aligned} \phi_j^{n+1} &= -\bar{I}^2 (1 + \bar{T}_{j-1}^{n+1} / E \cdot A)^2 \\ &+ (x_j^{n+1} - x_j^{n-1})^2 + (z_j^{n+1} - z_j^{n-1})^2 \\ &= \phi_j^{n+1} (T_{j-2}^{n+1}, T_{j-1}^{n+1}, T_j^{n+1}) = 0 \end{aligned} \quad (53)$$

( $j=2, 3 \dots N$ )

また張力  $T_j^{n+1}$  を (29) 式のように考えて、(53) 式をテラー展開すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \phi_j^{n+1} &= \bar{\phi}_j^{n+1} + \frac{\partial \bar{\phi}_j^{n+1}}{\partial T_{j-2}^{n+1}} \cdot \Delta T_{j-2}^{n+1} + \frac{\partial \bar{\phi}_j^{n+1}}{\partial T_{j-1}^{n+1}} \cdot \Delta T_{j-1}^{n+1} \\ &+ \frac{\partial \bar{\phi}_j^{n+1}}{\partial T_j^{n+1}} \cdot \Delta T_j^{n+1} + (\text{Higher order terms}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (54)$$

さて、いま  $\bar{T}_j^{n+1}$  が正確な張力の値  $T_j^{n+1}$  に十分に近いとすると、(54) 式の高次の項は省略でき、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{E}_j^{n+1} \cdot \Delta T_{j-2}^{n+1} - \bar{F}_j^{n+1} \cdot \Delta T_{j-1}^{n+1} \\ + \bar{G}_j^{n+1} \cdot \Delta T_j^{n+1} = -\bar{\phi}_j^{n+1} \end{aligned} \quad (55)$$

( $j=2, 3 \dots, N+1$ )

ここで、

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_j^{n+1} &= -\bar{I}^2 (1 + \bar{T}_{j-1}^{n+1} / E \cdot A)^2 \\ &+ (\bar{x}_j^{n+1} - \bar{x}_j^{n-1})^2 + (\bar{z}_j^{n+1} - \bar{z}_j^{n-1})^2 \\ \bar{E}_j^{n+1} &= \frac{\partial \bar{\phi}_j^{n+1}}{\partial T_{j-2}^{n+1}}, \quad \bar{F}_j^{n+1} = -\frac{\partial \bar{\phi}_j^{n+1}}{\partial T_{j-1}^{n+1}}, \quad \bar{G}_j^{n+1} = \frac{\partial \bar{\phi}_j^{n+1}}{\partial T_j^{n+1}} \end{aligned} \quad (56)$$

ここで、 $\bar{E}_j^{n+1}$ ,  $\bar{F}_j^{n+1}$ ,  $\bar{G}_j^{n+1}$  は、最終的に (31) 式~(33) 式の形に表わすことができる。また (55) 式より、 $\Delta T_j^{n+1}$  を求める式が導かれるが、これをマトリックスの形で表示した式が (30) 式である。ところで本文 (35) 式および (36) 式中の  $\bar{S}_j^{n+1}$ ,  $\bar{R}_j^{n+1}$ ,  $\bar{P}_j^{n+1}$ ,  $\bar{Q}_j^{n+1}$ ,  $\bar{U}_j^{n+1}$ ,  $\bar{V}_j^{n+1}$  は、 $x_j^{n+1}$  および  $z_j^{n+1}$  が求まるまでは決定されないの上端に ~印が付記されている。