資　料

荒海面に於ける船体の運動について

"On the Motions of Ships in Confused Seas" by Manley St. Denis, and Willard J. Pierson. TSNA&ME 1953.

大洋中の船の運動の研究を志す者は，大洋波の全く混乱した不規則さに手を焼き，今更乍ら Lord Rayleigh の言葉，「海面状態を支配する基本的な法則があるとすればそれはあて嵌められる様な法則が一つも無いと云う事だろう」を身に泌みて感じざるを得ない。

所が数年前より著者の一人 Pierson を初め多くの海洋学者は，電気工学に於ける雑音の統計学的な取扱法に刺激されて，複雑な海面状態を統計的な方法により単純な正弦波型の集合として説明する事に成功し，波の不規則性，スペクトル分布等の研究が盛んに行われて居る。

最近米国では海洋学者と造船学者が協力して複雑な海象の下に於ける船の運動を研究しようとする動きが活発となり本論文の著者を初め，Davidson, Weinblum 等の学者が参加している様である。

本論文は海洋学者と造船学者が初めて協力して船の運動に取り組んだものであり種々の極めて重大な且興味ある問題を提起して居り，今後この方面の研究を志す者に取つて一つの大きな指針となるものと思われる。

（訳者註）

緒　論

従来船の運動の研究は規則的な海面状態についてのみ行われて来て居り，従つて実際の複雑な海面上での船の運動を満足に説明する事は出来なかつた。著者の一人 Pierson は数年前より波の不規則性の数学的解析を行い，複雑な海面状態を支配する法則を発見する事に成功したが，その方法を応用して荒天中に於ける船の運動を説明しようと試みたのが本論文である。

本論文の結果を要約すれば，若し規則的な波系に対する船の反応が決定出来れば，複雑な海面に於ける船の反応の性格が見出せるだろうと云う事，従つて波の中の運動を従来よりも高い精度で予知する事が出来るだろうと云う事である。

座　標　系

座標系としては，次の四つが考えられる。

(a) 地球の方位に基づく固定座標系（絶対座標系）X_a-Y_a

原点は海面上の一点。X_a 軸及び Y_a 軸の正方向は，夫々東と北を向く。

(b) 風の方向に基づく固定座標系　X_w-Y_w

原点は (a) と同じ。X_w 軸の正方向は，風の方向と一致。

(c) 船の進行方向に基づく固定座標系（相対座標系）$X-Y$

原点は (a)(b) と同じ。X 軸の正方向は，船の進行方向に取る。

(d) 船に固定された動座標系　X_e-Y_e

原点は船の質量中心。X_e 軸の正方向は，船の進行方

TABLE 1.1.—TRANSFORMATIONS OF SYSTEMS

	Absolute	Wind	Relative	Vessel[a]
Abs.	....	$X_w = X_a \cos\theta_w + Y_a \sin\theta_w$ $Y_w = -X_a \sin\theta_w + Y_a \cos\theta_w$ $\chi_w = \chi_a - \theta_w$	$X = X_a \cos\theta + Y_a \sin\theta$ $Y = -X_a \sin\theta + Y_a \cos\theta$ $\chi = \chi_a - \theta$	$X_e = X_a \cos\theta + Y_a \sin\theta - vt$ $Y_e = -X_a \sin\theta + Y_a \cos\theta$ $\chi_e = \chi_a - \theta$
Wind	$X_a = X_w \cos\theta_w - Y_w \sin\theta_w$ $Y_a = X_w \sin\theta_w + Y_w \cos\theta_w$ $\chi_a = \chi_w + \theta_w$	....	$X = X_w \cos(\theta - \theta_w) - Y_w \sin(\theta - \theta_w)$ $Y = X_w \sin(\theta - \theta_w) + Y_w \cos(\theta - \theta_w)$ $\chi = \chi_w + (\theta - \theta_w)$	$X_e = X_w \cos(\theta - \theta_w) + Y_w \sin(\theta - \theta_w) - vt$ $Y_e = -X_w \sin(\theta - \theta_w) + Y_w \cos(\theta - \theta_w)$ $\chi_e = \chi_w + (\theta - \theta_w)$
Rel.	$X_a = X \cos\theta - Y \sin\theta$ $Y_a = X \sin\theta + Y \cos\theta$ $\chi_a = \chi + \theta$	$X_w = X \cos(\theta_w - \theta) + Y \sin(\theta_w - \theta)$ $Y_w = -X \sin(\theta_w - \theta) + Y \cos(\theta_w - \theta)$ $\chi_w = \chi - (\theta_w - \theta)$	....	$X_e = X - vt$ $Y_e = Y$ $\chi_e = \chi$
Vessel	$X_a = X_e \cos\theta_e - Y_e \sin\theta_e + vt \cos\theta_e$ $Y_a = X_e \sin\theta_e + Y_e \cos\theta_e + vt \sin\theta_e$ $\chi_a = \chi_e + \theta_e$	$X_w = X_e \cos(\theta_w - \theta_e) + Y_e \sin(\theta_w - \theta_e) + vt \cos(\theta_w - \theta_e)$ $Y_w = -X_e \sin(\theta_w - \theta_e) + Y_e \cos(\theta_w - \theta_e) + vt \sin(\theta_w - \theta_e)$ $\chi_w = \chi_e - (\theta_w - \theta_e)$	$X = X_e + vt$ $Y = Y_e$ $\chi = \chi_e$	

[a] Note $\theta_e \equiv \theta$.

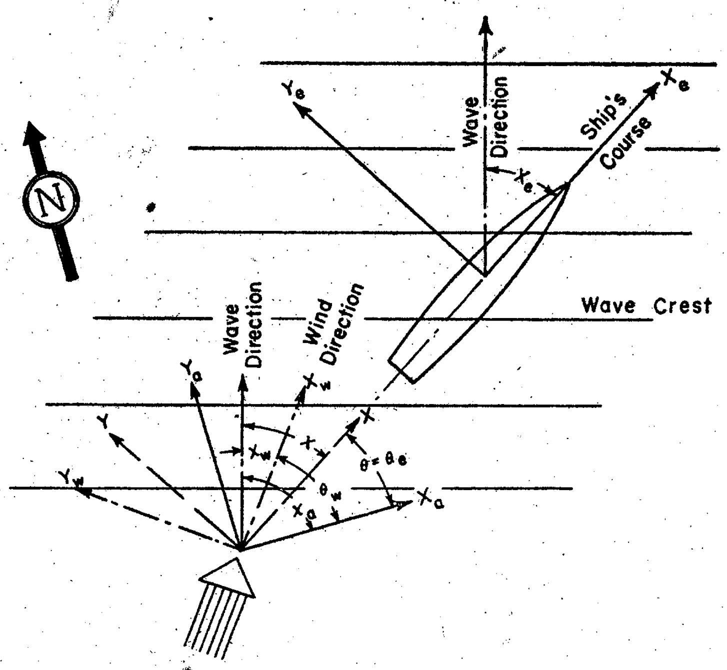


Fig. 1.1. Coordinate Systems

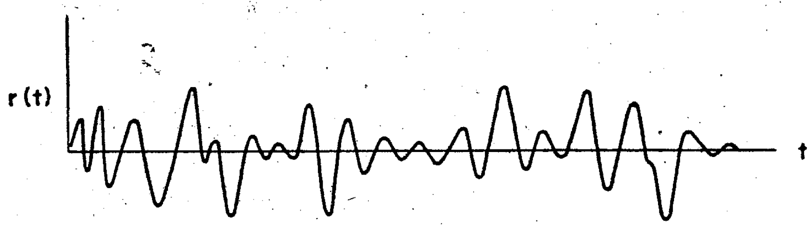


Fig. 1.2. Actual Wave Record

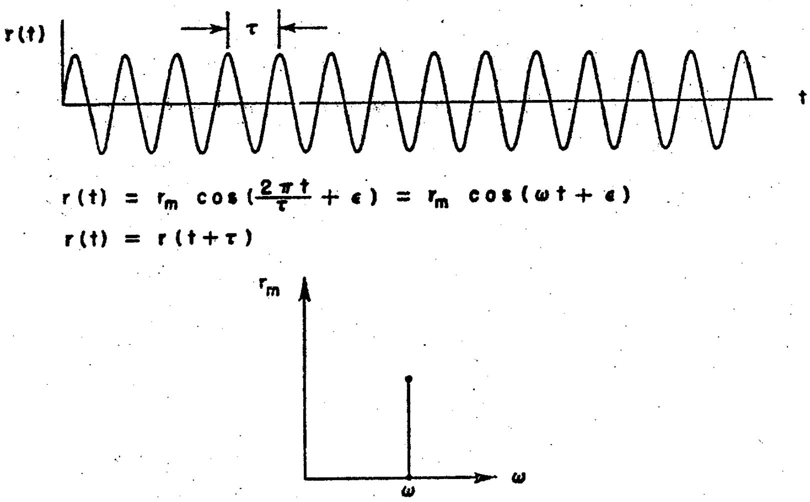


Fig. 1.3. Periodic Wave System with an Amplitude Component at a Single Spectral Frequency

向に取る。

以上の座標系は何れも右手系で，角は正 X 軸から反時計方向を正に取る。

之等の座標系は目的に応じて用いられるが，本論文では，大部分 (c) と (d) が用いられる。尙，各座標間の相互関係は Table 1.1 に示されている。

理論の経過

本論文では，理論の展開は，大体次の順序を追う。

海面状態の決定—応答振巾演算子の算定 (response amplitude operator) —振動数図示—船の応答の決定。

本　論

I. 海 面 状 態

先ず出発点として古典的な波の理論を振返つて見る。

1. 古典的な波の理論

波の自由表面は，固定座標系 $X-Y$ (即ち先に述べた (a)(b)(c) の何れかである) と時間 t に関し次の様に表わすことが出来る。

$$r\ (X, Y, t)\ r_m \cos\left[\omega^2/g\ (X\cos\chi + Y\sin\chi) - \omega t + \varepsilon\right] \tag{1.1}$$

$r\ (X, Y, t)$……X—Y 平面を基準とした表面の高さ。

r_m……波の振巾，$\omega=2\pi/\tau$ (τ は波の周期)

χ……波の伝播方向，ε……位相角

海が無限に深い場合の，波長 λ と速度 C は，

$$C=\lambda/\tau=g/\omega=\sqrt{g\lambda/2\pi}=g\tau/2\pi \tag{1.2}$$

$$\lambda=2\pi C^2/g=2\pi g/\omega^2=g\tau^2/2\pi \tag{1.3}$$

で表され，波数は

$$k\triangleq 2\pi/\lambda=\omega^2/g=g/C^2=4\pi^2/g\tau^2 \tag{1.4}$$

($\triangleq$は定義により等しいことを意味する。) で定義される。

2. 一定点（原点）に於ける海面状態の表現

先ず原点に於て，自由表面を時間の函数として表してみると，海面の上下は，$r\ (D, O, t)$ 即ち $r\ (t)$ で表される。t が数日という order のものであれば，$r\ (t)$ は周期性を失うかも知れぬが，船の運動を論ずるには，精

々20〜30秒の時間で十分なので $r(t)$ の周期性は保持されると見てよい。先ず余り不規則でない波の記録 Fig. 1.2 を検討してみよう。

(1) 単一のスペクトル振動数に就いて振巾成分を持つ周期波系。

波高として有義波高を取り，解析を行うと，$r(t)$ は

$$r(t) \cong r_m \cos(2\pi t/\tau + \varepsilon) = r_m \cos(\omega t \times \varepsilon) \qquad (1.5)$$

之は，振巾のスペクトルが，振動数の或る一つの値に集中していること，及び波の記録が τ なる周期を持ち，振巾が一定なることを意味する。Fig. 1.3 を参照。

これを実際の波の記録と較べると次の事柄が判る。

(a) 二つの波系は，$t=0$ では同位相だが，やがてずれを生ずる。

(b) 二つの波系の波高は，滅多に一致しない。

この様な表現法では，二つの媒介変数しか自由に選ぶことが出来ないから，これでは実際の波を時間の函数として表わすには，不十分である。

(2) 多数の分立スペクトル振動数に就いて振巾成分を持つ周期波系。

波が t_1 秒毎に正確に繰返されると仮定し，$t=0$ から t_1 までの波を考える時，特定の波型がフーリエ級数で解析されるならば，

$$r(t) \cong \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos(2\pi nt/t_1 + \varepsilon_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos(\omega_n t + \varepsilon_n) \qquad (1.6)$$

スペクトルは Fig. 1.4 に示される。実際の波の記録をフーリエ級数で展開して見ると，次の特徴が現れる。

(a) 低次の調和函数は無視する事が出来，その函数の数は時間間隔 t_1 により変る。

(b) 最大振巾の調和函数は，有義波の周期より幾分長い周期を持つ調和函数に相当する。

(c) 周期3秒以下の高次調和函数は無視出来る。

(d) r_n の値は，極めて不定で，n が連続的に変化すると，急激に変化する。

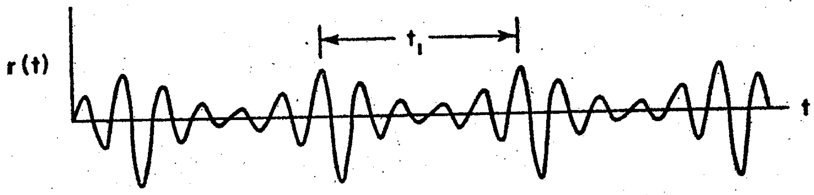
フーリエ展開は，実際の波をよく表すが，特定な時間範囲以外のものを表せぬという欠点がある。

(3) 連続振巾スペクトルを持つ非周期波系。—フーリエ積分定理による表わし方。

$t=0$ から t_n までの波の記録を多数の時間領域 $(0<t<t_1)$，$(0<t<t_2)$，……$(t_{n-1}<t<t_n)$，に分ち，波型は各領域で決定される。

$$r(t) = r_0(t) + r_1(t-t_1) + r_2(t-t_2) + \cdots\cdots + r_{n-1}(t-t_{n-1}) \qquad (1.7)$$

$t_p<t<t_{p+1}(0<p<n-1)$ の領域でフーリエ積分展開は，



$$r(t) = \sum_{n=1}^{N} r_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{t_1} + \epsilon_n\right) = \sum_{n=1}^{N} r_n \cos(\omega_n t + \epsilon_n)$$

$$r(t) = r(t+t_1)$$

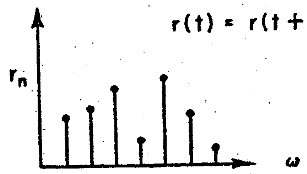
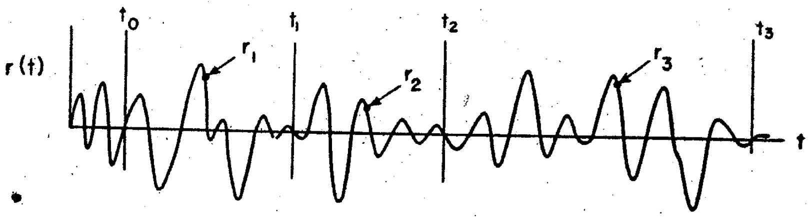


Fig. 1.4. Periodic Wave System with Amplitude Components at Many Discrete Spectral Frequencies



$$r(t) = r_0(t) + r_1(t-t_1) + \dots r_n(t-t_n)$$

$$r_p(t) = \int_0^{\infty} a_p(\omega)\cos\omega t\,d\omega + \int_0^{\infty} b_p(\omega)\sin\omega t\,d\omega$$

$$a_p(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r_p(t)\cos\omega t\,d\omega$$

$$b_p(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r_p(t)\sin\omega t\,d\omega$$

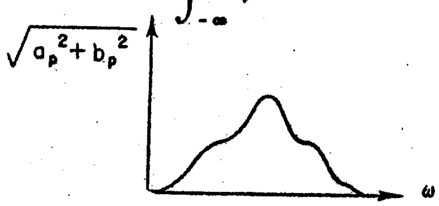


Fig. 1.5. A Periodic Wave System Having a Continuous Amplitude Spectrum

$$r_p(t)=\int_0^\infty a_p(\omega)\cos\omega t d\omega+\int_0^\infty b_p(\omega)\sin\omega t d\omega \tag{1.8}$$

$$a_p(\omega)\triangleq\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r_p(t)\cos\omega d\omega$$

$$b_p(\omega)\triangleq\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r_p(t)\sin\omega d\omega$$

となる。

此の方法の欠点は，a_p 及び b_p を決める正確な方法がない事である。だが過渡現象の問題の検討に便利である。

(4) 連続振巾スペクトルを持つ非周期波系。一ガウスの正規分布に対するルベックのエネルギー積分表示。

此の方法によると，一定点に於ける海面状態は，

$$r(t)=\int_0^\infty\cos[\omega t+\varepsilon(\omega)]\sqrt{[r(\omega)]^2d\omega} \tag{1.10}$$

で表わされる。所謂，リーマン積分ではないが，部分的に和を求める事により，任意の精度の近似が可能である。此の近似を論ずる前に次の三つの事項の説明を要する。

(a) エネルギースペクトル (energy spectrum)

之は $[r(\omega)]^2$ で表わされ，特定な振動数 ω に就いての波の振巾の平均自乗値であり，海面の形状そのものではないが，海面波の平均ポテンシャルエネルギーと密接な関係がある。

(b) 累積エネルギー密度 (cumulative energy density)

エネルギースペクトルの ω に就いての積分は

$$\int_0^\infty[r(\omega)]^2d\omega\triangleq R(\omega) \tag{1.11}$$

で，これは累積エネルギー密度とし知られている。スペクトル全域に亘る累積エネルギー密度は

$$\int_0^\infty[r(\omega)]^2d\omega\triangleq R(\infty)\triangleq R$$

であつて海面状態を表すに便利な媒介変数となる。

(c) 任意位相 (random phase)

之は (1.10) 式中 $\varepsilon(\omega)$ で表されており，次式

$$p[0<\varepsilon(\omega)<2\pi\alpha]=\alpha \tag{1.13}$$

で与えられる。之は $\varepsilon(\omega)$ が0から 2π までの値を取る確率が α であることを意味する。こゝで (1.10) の積分は，次の様な和の極限値として与えられる。

$$r(t)=\lim_{\substack{(\omega_{2n+2}-\omega_{2n})\to 0\\ \omega_{2g}\to\infty}}\sum_{n=0}^{g}\cos[\omega_{2n+1}\cdot t+\varepsilon(\omega_{2n+1})\cdot$$

$$\sqrt{[r(\omega_{2n+1})]^2(\omega_{2n+2}-\omega_{2n})}$$

$$\fallingdotseq\int_0^\infty\cos[\omega t+\varepsilon(\omega)]\sqrt{[r(\omega)]^2d\omega} \tag{1.14}$$

実際の応用では，間隔は一定で小さく，範囲を大きく取ることが出来るので，$r(t)$ は次の如く表わし得る。

$$r(t)\cong\sum_{n=0}^{g}\cos[\omega_{2n+1}t+\varepsilon(\omega_{2n+1})]\cdot$$

$$\sqrt{[r(\omega_{2n+1})^2](\omega_{2n+2}-\omega_{2n})} \tag{1.15}$$

波の記録からの抽出点がガウス分布に従うか否かは，記録から直接に確められ，特に大きな波を除いては，ガウス分布に近附く。現段階に於て，此の近似法は，他の方法に比し優れたものである。海面状態の最も簡単な表示 (1.5) と最も実用的な (1.10) とを比較検討してみると，

(a) 有限振巾 r_m を持つ単一の周期波系は種々の ω を持ち無限に小さい振巾 $\sqrt{[r(\omega)]^2d\omega}$ を持つ無数の波を全く at random に重畳する事により置き換えられる。

(b) 簡単な周期波系の一定位相差は，勝手に選ばれた無数の位相差 $\varepsilon(\omega)$ で置き換えられる。

3. 或領域内の海面状態一固定座標系

今までは海面上の一点に就いて考察して来たが，こゝでは海面上の全ての点の状態に論を進める。

(1) 長い波頂を持つ波

此の場合，移動方向 χ は全ての波に就いて同じであるから，波数 ω^2/g を導入し (1.10) を書き直すと，

$$r(X.Y.t)=\int_0^\infty\cos[\omega^2/g(X\cos\chi+Y\sin\chi)-\omega t$$

$$-\varepsilon(\omega)]\cdot\sqrt{[r(\omega)]^2d\omega} \tag{1.17}$$

X, Y に関する項は ω と λ が与えられる一定値となり，距離に就て変化を表わす要素は $\varepsilon(\omega)$ に含まれるから (1.17) は

$$r(X.Y.t)=\int_0^\infty\cos\{\omega t+[\varepsilon(\omega)-\omega^2/g(X\cos\chi$$

$$+Y\sin\chi)]\}\sqrt{[r(\omega)^2d\omega} \tag{1.18}$$

これは (1.15) と同様，区分の和として表される。

$$r(X.Y.t)=\sum_{n=0}^{g}\cos\{\omega_{2n+1}t+\varepsilon(\omega_{2n+1})$$

$$-\frac{(\omega_{2n+1})^2}{g}[X\cos\chi+Y\sin\chi]\}$$

$$\times\sqrt{[r(\omega_{2n+1})]^2(\omega_{2n+2}-\omega_{2n})} \tag{1.19}$$

X, Y が或一定値 X_1, Y_1 を取るとき，任意位相に 2π ケの整数を加減することが出来るので，次式を満す新しい任意位相が得られる。

$$0\leqq\varepsilon(\omega_{2n+1})-(\omega_{2n+1})^2/g[X_1\cos\chi+Y_1\sin\chi]$$

$$+2\pi N=\varepsilon'(\omega_{2n+1})\leqq2\pi \tag{1.20}$$

$\varepsilon'(\omega_{2n+1})$ は $\varepsilon(\omega_{2n+1})$ と同じ確率法則に従つて分布

する。即ち広い領域に亘つて Gauss 分布が成立し，エネルギースペクトルも同じになる。結局，統計的には，海面の全ての点は同じ性質を持つことになる。

(2) 短かい波長を持つ波

之は方向 χ の異る長波頂の波系を重ねることによつて表わされる。(1.17)で χ を変数とすれば，

$$r(X,Y,t)=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos[\omega^2/g(X\cos\chi+Y\sin\chi)-\omega t-\varepsilon(\omega,\chi)]\sqrt{[r(\omega,\chi)]^2d\omega d\chi} \quad (1.21)$$

部分和で表せば

$$r(X,Y,t)=\sum_{m=0}^{m=p}\sum_{n=0}^{n=g}\cos\Big[\omega_{2n+1}\cdot t+\varepsilon(\omega_{2n+1}-\chi_{2m+1})-\frac{(\omega_{2n+1})^2}{g}(X\cos\chi_{2n+1}+Y\sin\chi_{2n+1})\Big]$$
$$\times\sqrt{[r(\omega_{2n+1},\chi_{2n+1})]^2(\omega_{2n+2}-\omega_{2n})(\chi_{2m+1}-\chi_{2m})} \quad (1.22)$$

この和に於て，ω_{2p+2}，$p\to\infty$，及び $(\omega_{2n+2}-\omega_{2n})\to 0$ なるとき，積分が求められることになる。

この様にして求められた波系は $\sqrt{[r(\omega,\chi)]^2d\omega\cdot d\chi}$ で与えられる小さな振巾よりなり，各波系は $\varepsilon(\omega,\chi)$ なる位相差を持つ。海象状態は，之等無数の波系から構成される。又，エネルギースペクトルは，ω のみの函数で表わされる。

$$[r(\omega)]^2=\int_{-\pi}^{\pi}[r(\omega,\chi)^2]^2d\chi \quad (1.23)$$

〔証明〕 (1.22) で m が大とし，n 一定の時の m までの和を考えると，振巾は次の確率函数からの任意抽出値となる。

$$p\ (k_1<a_{2n+1}<k_2)=\int_{k_1}^{k_2}\frac{2ke^{-k^2/\Delta R}}{\Delta R}dk \quad (1.24)$$

$$k_1\geqq 0,\ \Delta R\int_{\omega_{2n}}^{\omega_{2n+1}}\int_{-\pi}^{\pi}[r(\omega,\chi)]^2d\chi \quad (1.25)$$

$r(t)$ が n までの和であれば

$$r(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}\cos[\omega_{2n+1}t+\varepsilon(\omega_{2n+1})] \quad (1.26)$$

区分間隔が小であると ω の或小さな範囲 ω_{2s} から ω_{2s+2j} では

$$\lim_{j\to\infty}\sum_{n=s}^{s+j-1}(a_{2n+1})^2=\int_{\omega_{2s}}^{\omega_{2s+2j}}[r(\omega)]^2d\omega \quad (1.27)$$

4. 海面状態の性質

上述のルベックのエネルギー積分法に基く海面状態の表示は他の方法に比し，確実性の高いものであるが，自由表面の有する境界条件の非線型性を表わすことは出来ない。以下，述べられる諸性質は，今まで述べて来た様な

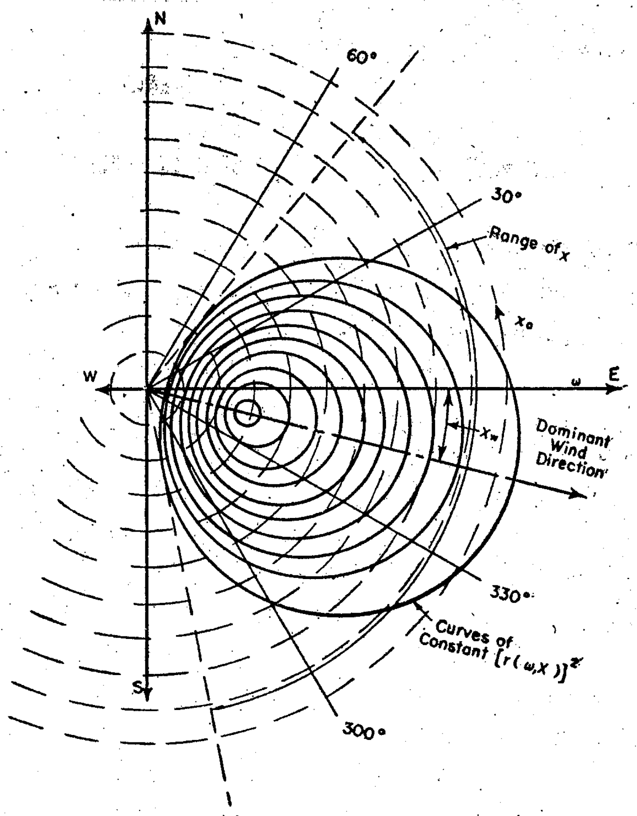


Fig. 1.6. Energy Spectrum for a Sea (Idealized)

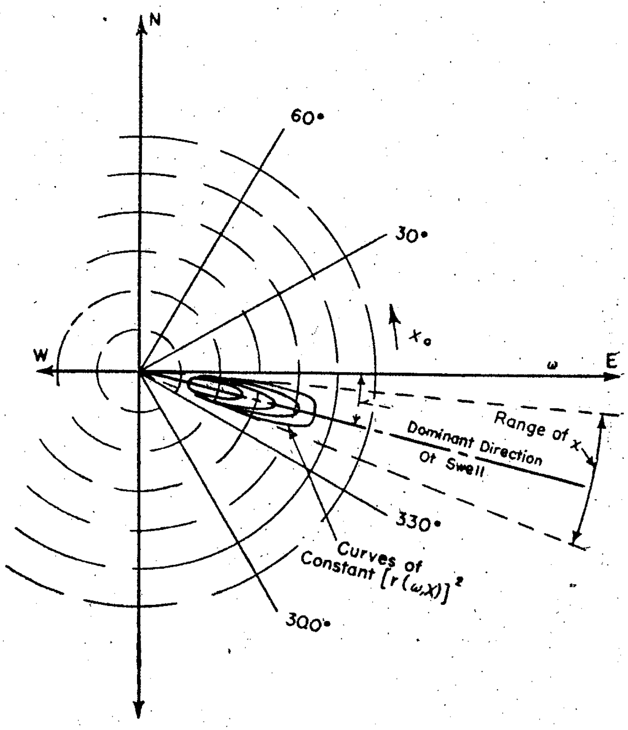


Fig. 1.7 Energy Spectrum for a Swell (Idealized)

数学的表現から得られたものである。

(a) 海の波は，短かい波頂を持つ。一自然の中で起る波は常に此の型を取る。

(b) 海の表面は不規則で，決して同じ型を繰返さない。

(c) 波頂の型は保持されない。

之に加えて，この表現法では，風波とうねりの根本的な差異を表わす事が出来る。風波のエネルギースペクトルは，ω と χ の広範な有義値に亘つているが，うねりでは狭い。即ち，風波では ω は 1°～30° の範囲の周期に相当し，χ の範囲は $\pi/2$ を超える。うねりでは χ は 10° より小さい。又，重要な差として，風波は波頂が短かく，その進行方向も一定でないが，うねりは，可成長い波頂を持ち，進行方向は殆ど同じである。Fig. 1.6 は風波のエネルギースペクトルを示し，Fig. 1.7 はうねりのそれを示す。

5. 海面状態のスペクトル

海面状態のスペクトルは次の手続で決定される。

i) 一定点に於ける時間の函数である表面の高さ (wave recorder を用う。) と可成り高い場所から見た波の模様 (stereograph を用う。) の同時記録。

ii) 理想化された風に対するエネルギースペクトルを理論的に導き出すこと。

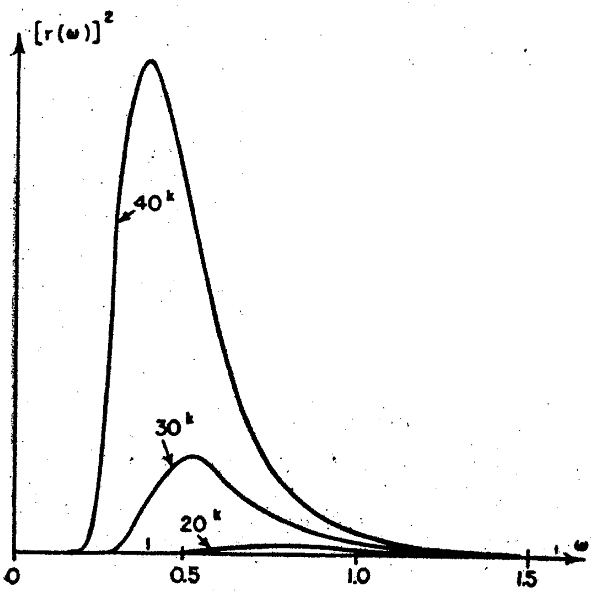


Fig. 1.8. Neumann Spectrum of Wave Energy for Fully Arisen Sea at Wind Speeds of 20, 30 and 40 Knots

Note the displacement of the optimum band (maximum of spectral energy) from higher to lower frequencies with increasing wind speed.

Fig. 1.8 は Neuman のエネルギースペクトラムであるが，これに風向から求めた χ_ω を導入して，次式を得る。

$$[r(\omega,\ \chi_\omega)]^2=\begin{cases}\dfrac{C}{\omega^6}e^{-2g^2/U^2\omega^2}\cos^2\chi_\omega & if -\pi/2<\chi_\omega<\pi/2\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \tag{1.28}$$

$C=3.05\times10^9\ \mathrm{cm^2\,sec^{-5}}$ or $4.21\times10^6\ \mathrm{ft^2\,sec^{-5}}$

U は風速で cm/sec or ft/sec

この様なスペクトルは，風が長時間，長距離に亘つて吹けば求められる。今 52kt の風が 80 時間，1800 浬に亘つて吹く時を仮定しよう。この時 (1.27) の積分から累積エネルギー密度の式が求まる。即ち

$$R(\mathrm{m}^2)=0.622(U/10)^5(\mathrm{m/sec})$$
$$R(\mathrm{ft}^2)=0.242(U/10)^5(\mathrm{ft/sec}) \tag{1.29}$$

若し，波群のスペクトル帯域が狭ければ，波高の包絡線 $E(t)$ は次の様な分布をする事が Longnett-Higgins によつて求められた。

$$p[0<E(t_1)<M]=\int_0^M\frac{2\xi}{R}e^{-\xi^2/R}d\xi \tag{1.30}$$

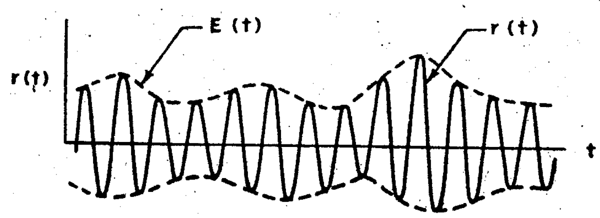


Fig. 1.9. Envelope of Wave Record

海面状態のスペクトルは一般に狭くないが，この場合でも，平均波高に近似すれば，此の分布は使える。平均波高は分布の原点の周りのモーメントから求まり，

$$\bar{h}=1.77\sqrt{R} \tag{1.31}$$

有義波高 (最大波高から 1/3 とつた波の平均高) は，

$$h_{1/3}=2.83\sqrt{R} \tag{1.32}$$

$$h_{1/10}=3.60\sqrt{R} \tag{1.33}$$

スペクトルが極大なるときの ω は (1.28) から，

$$\omega_m=\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{g}{U}=\frac{g}{1.22U} \tag{1.34}$$

スペクトルの傾斜が極大になる点では，

$$\omega_c=\sqrt{\frac{8}{15+\sqrt{57}}}\cdot\frac{g}{U}=\frac{g}{1.68U} \tag{1.35}$$

又，平均振動数は Neumann のスペクトルによると

$$\bar{\omega}=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{g}{U}=\frac{g}{0.866U} \tag{1.36}$$

II. 応答振幅演算子 (Pesponse amplitude operator)

之は，船が単位振巾の規則的な海面にあるときの応答振巾を導く函数である。こゝでは，heave, pitch, roll に就て検討を行う。此の演算子は理論，実験両面から求められる。

1: 理　　論

議論を進めるに先立ち諸種の制限を設ける。

(a) 適用される対象は，排水型の船舶に限る。

(b) Froude-Krylov の仮設の導入。

(c) 各運動は独立であるとする。

(d) 応答は線型面に限られる。

(d) からは又，(1) 考察が箱船に限られる。(2) 減衰は波の生成と独立に生ずる。と云う拘束が出て来る。

以上の制限から応答の運動方程式は，

$$\frac{d^2s}{dt^2}+2h_s\frac{ds}{dt}+\nu_s{}^2S=f_s\binom{\sin}{\cos}(\omega_e t-\varepsilon) \quad (2.11)$$

S は応答，$2h_s$ は減衰係数，ν_s は船の固有非減衰振動数，f_s は波の性質及び，船型で決まつて来る。右辺が時間に就いての周期函数であれば，

$$S(t)=E_s\mu_s r_m\binom{\sin}{\cos}(\omega_e t-\varepsilon_s) \quad (2.2)$$

E_s は f_s と同様，波の性質，船型で決まる。μ_s は

$$\mu_s=\nu_s{}^2/\sqrt{(\nu_s{}^2-\omega_e{}^2)^2+(2h_s\omega_e)^2}$$

$$=1/\sqrt{[1-(A_s)_e{}^2]^2+\kappa_s{}^2(A_s)_e{}^2} \quad (2.3)$$

但し，$(A_s)_e\triangleq\omega_e/\nu_s$ で有効同調比を表わす。今 $r_m=1$ の時の応答振巾を応答振巾演算子と定義する。即ち

$$A_s\triangleq E_s\mu_s$$

こゝで E_s はω，χ の函数で (c) 座標に関し，μ_s は波との出会度数(ω_e)の函数で (d) 座標系に関するものである。不便を避けるために (c) 座標系への統一を行う。

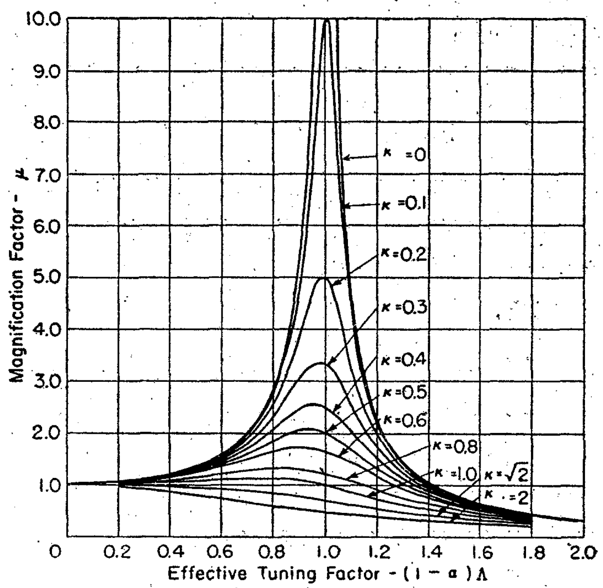


Fig. 2.1.　Magnification Factor

今，船速を v とすれば波の相対速度は $C-v\cos\chi\triangleq C(1-\alpha)$。従つて

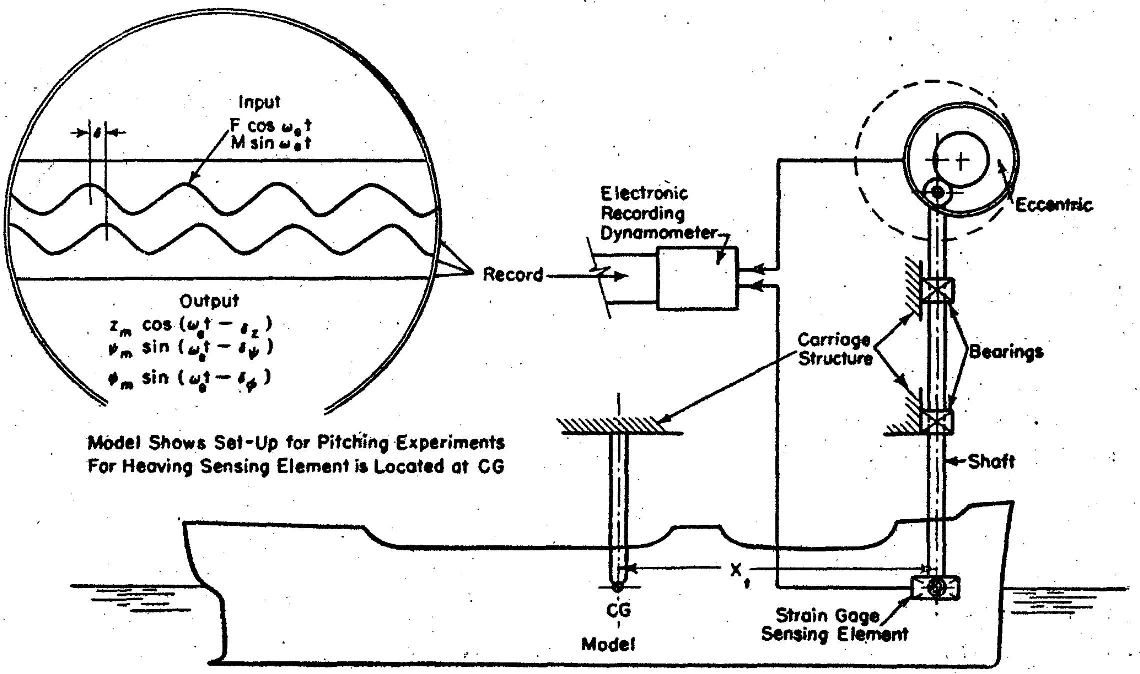


Fig. 2.2.　Experimental Set-up with Oscillator to Obtain Response Amplitude Operators

$$\alpha = \triangleq v\cos\chi/C \quad (2.5)$$

$$\therefore \quad \omega_e = \omega(1-\alpha) = \omega - \frac{\omega^2}{g}v\cdot\cos\chi \quad (2.6)$$

又 $(\Lambda_e)_s = (1-\alpha)\Lambda_s$ (2.7)

従つて $\mu_s = 1/\sqrt{[1-(1-\alpha)^2\Lambda_s^2]^2 + (1-\alpha)^2\kappa_s^2\Lambda_s^2}$ (2.8)

μ_s の性質は Fig. 2.1 からよく判る。

2: 実　　験

実験装置は Fig. 2.2 に示されている。

(i) Heave

外力は正弦変化を以て与えられる。従つて運動方程式は

$$M_z\frac{d^2z}{dt^2} + N_z\frac{dz}{dt} + R_z z = F_z\cos\omega_e t \quad (2.9)$$

N_z＝系の見掛質量,　N_z＝線型減衰係数

R_z＝復元係数　F_z＝外力の振巾

今　$z = z_m\cos(\omega_e t - \delta_z)$ (2.10)

とすると,

$$M_z(\omega_e) = \frac{1}{\omega_z}\left(R_z - \frac{F_z}{z_m}\cos\delta_z\right) \quad (2.11)$$

$$N_z(\omega_e) = F_z\sin\delta_z/\omega_e\cdot z_m \quad (2.12)$$

これらから次のものが求まる。

慣性係数　$k_z(\omega_e) = (M_z - \rho V)/\rho V$ (2.13)

無次元減衰係数　$\kappa_z(\omega_e) = N_z/M_z\cdot\nu_z$ (2.14)

今，模型が波の中を曳かれるとすると，運動方程式は

$$M_z\frac{d^2z}{dt^2} + N_z\frac{dz}{dt} + R_z z = F_z\cos(\omega_e t - \varepsilon_z)$$
$$= f_z M_z\cos(\omega_e t - \varepsilon_z) = \nu_z^2 r_m E_z M_z\cos(\omega_e t - \varepsilon_z)$$
$$= r_m R_z E_z\cos(\omega_e t - \varepsilon_z) \quad (2.15)$$

(2.15) の解が　$z = z_m\cos(\omega_e t - \varepsilon_z - \delta_z)$ (2.17)

で表わされるならば,

$$E_z(\omega_z) = \frac{z_m}{R_z r_m}\sqrt{(R_z - \omega_e^2 M_z)^2 + \omega_e^2 N_z^2} \quad (2.18)$$

$$\delta_z(\omega_e) = \operatorname{arctg}\omega_e N_z/(R_z - \omega_e^2 Nz) \quad (2.19)$$

(ii) Pitch

正弦変化をする力 F_ψ を重心の前方（又は後方）X_ψ の点に加えると，モーメントは $M_\psi\sin\omega_e t$，但し $M_\psi = F_\psi X_\psi$，従つて運動方程式は

$$I_\psi\frac{d^2\psi}{dt^2} + N_\psi\frac{d\psi}{dt} + R_\psi\psi = M_\psi\sin\omega_e t \quad (2.20)$$

heave のときと同様にして,

$$I_\psi(\omega_e) = \frac{1}{\omega_e^2}\left(R_\psi - \frac{M_\psi}{\psi}\cos\delta_\psi\right) \quad (2.21)$$

$$N_\psi(\omega_e) = (M_\psi\sin\phi)/\omega_e\psi \quad (2.22)$$

又，波の中の実験では

$$E_\psi(\omega_e) = \frac{\psi}{R_\psi k r_m}\sqrt{(R_\psi - \omega_e^2 I_\psi)^2 + \omega_e^2{}_\psi N^2} \quad (2.23)$$

$$\delta_\psi(\omega_e) = \operatorname{arctg}\omega_e N_\psi/(R_\psi - \omega_e^2 I_\psi) \quad (2.24)$$

(iii) Roll.

F_φ は中心から Y_ψ の点に加える。従つてモーメントは，$M_\varphi\times\sin\omega_e t$ で $M_\varphi = F_\varphi Y_\varphi$ である。運動方程式は

$$I_\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2} + N_\varphi\frac{d\varphi}{dt} + R_\varphi\varphi = M_\varphi\sin\omega_e t \quad (2.25)$$

heave, Pitch のときと同様にして,

$$I_\varphi(\omega_e) = \frac{1}{\omega_e^2}\left(R_\varphi - \frac{M_\varphi}{\varphi}\cos\delta_\varphi\right) \quad (2.26)$$

$$N_\varphi(\omega_e) = M_\varphi\sin\delta_\varphi \quad (2.27)$$

真横から波を受け，模型の速度が 0 なる実験から,

$$E_\varphi(\omega_e) = \frac{\varphi}{R_\varphi k r_m}\sqrt{(R_\varphi - \omega_e^2 I_\varphi)^2 + \omega_e^2 N_\varphi^2} \quad (2.28)$$

$$\delta_\varphi(\omega_e) = \operatorname{arctg}\omega_e N_\varphi/(R_\varphi - \omega_e^2 I_\varphi) \quad (2.29)$$

III. 振動数図示

今，船が波との出会度数 ω_e なる海面にある場合を考える。海象状態が，座標系 (d) に就いて表わされると (1.1) は

$$r(X_e, Y_e, t) = r_m\cos\left[\frac{\omega^2}{g}(X_e, \cos\chi + Y_e\sin\chi) - \left(\omega - \frac{\omega^2}{g}v\cos\chi\right)t + \varepsilon\right] \quad (3.1)$$

1: 出会度数 ω_e

之は

$$\omega_e \triangleq \omega - \frac{\omega^2}{g}v\cos\chi \quad (3.2)$$

で表わされ，χ の値によつて次の様な場合が考えられる。

(i) $90° < \chi < 270$……即ち船首より波を受け常に $\omega_e > \omega$

(ii) $0 < \chi < 90°, 270 < \chi < 360°$ この場合，船と波の相対速度から次の三つの場合が考えられる。今，速度比 α を

$$\alpha \triangleq (v\cos\chi)/C = (\omega v\cos\chi)/g \quad (3.3)$$

で定義すると，(3.2) から

$$\omega_e = \omega(1-\alpha) \quad (3.4)$$

従つて

(a) $\alpha < 1$ の時，$\omega_e > 0$　波は船を追い越す。

(b) $\alpha = 1$ の時，$\omega_e = 0$　波と船の相対位置が一定

(c) $\alpha > 1$ の時，$\omega_e < 0$　船は波を追い越す。

(3.2) から ω_e の極大値は，$\alpha = 1/2$ のときである。

出会度数が負であるということは一考を要するが，Fig. 3.1 の様に振動数図示を行えば，こだわる必要はない。又，数式の上で此の問題を解消するために，$\alpha > 1$ に対する ω_e の定義をしておく。即ち

$$\omega_e \triangleq -\omega + \frac{\omega^2 r}{g}\cos\chi \quad (3.10)$$

又　$\chi_e \triangleq \chi + \pi$ (3.11)

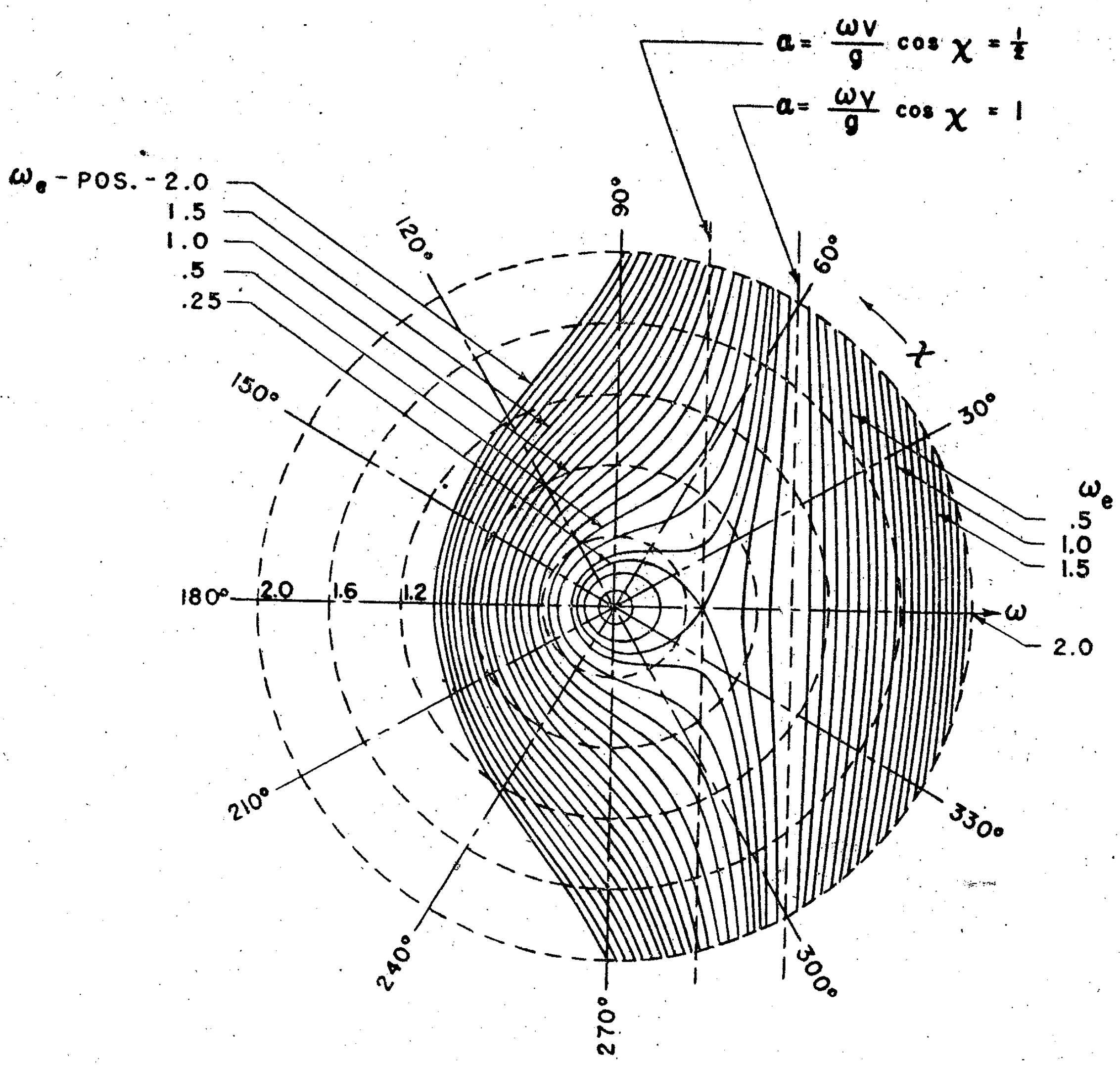


Fig. 3.1. Lines of Constant ω_e in the ω–χ Plane

Coordinates and curves are lines of constant $\omega\cdot v/g$ and $\omega e\cdot v/g$. Thus to get true values multiply the scalc values by g/v. In this figure, circles of constant ω have the values, $\omega\cdot v/g=0.4$, 0.8, 1.2, 1.6 and 2.0. The curves of constant ωe are for constant increments of $\Delta we\cdot v/g=0.10$. In addition, the curve, $\omega e\cdot v/g=0.25$, is given.

$\alpha>1$ に対して (3.10) の ω_e と (3.11) の χ_e, $\alpha<1$ に対して (3.2) の ω_e, $\chi=\chi_e$, を採れば, (3.1) は

$$r(X_e,\ Y_e,\ t)=r_m\cos\left[\frac{\omega^2}{g}(X_e\cos\chi_e+Y_e\sin\chi_e)-\omega_e t+\varepsilon\right] \tag{3.12}$$

これは$\omega_e-\chi_e$ 平面上，到る処で当てはまる。

2:逆　函　数

(3.2) を ω について解くと,

$$\omega=\frac{1\pm\sqrt{1-(4\omega_e v\cos\chi_e)/g}}{(2v\cos\chi_e)/g} \tag{3.13}$$

又は　$$\omega=[(1\pm\sqrt{1-4\alpha_e})/2\alpha_e]\omega_e \tag{3.14}$$

$\chi_e=\chi$ なることから解は

$$\alpha_e\triangleq(\omega_e v\cos\chi)/g<1/4 \tag{3.15}$$

$\alpha=\frac{1}{2}$ に対して,

$$\omega=\frac{1}{(2v/g)\cos\chi} \tag{3.16}$$

$$\alpha_e=\omega_e/2\omega=1/2(1-\alpha)=1/4 \tag{3.17}$$

$\alpha=1/2$ によつて分けられる $\omega-\chi$ 平面の二領域は $\omega_e-\chi_e$ 平面の相当領域に移すことが出来る。$\alpha>1/2$ の領域は更に二つの領域 $1/2<\alpha<1$, $\alpha>1$, に分けられ，之等の領域も $\omega_e-\chi_e$ 平面に相当領域を持つ。之等を表にすると,

原函数領域	$\omega-\chi$ 平面上の原領域の範囲	逆函数領域	$\omega_e-\chi_e$平面上の逆領域の範囲
I	$-\infty<\alpha<\frac{1}{2}$	I_{-e}	$-\infty<\alpha_e<\frac{1}{4}$
II	$\frac{1}{2}<\alpha<1$	II_{-e}	$0<\alpha_e<\frac{1}{4}$
III	$1<\alpha<\infty$	III_{-e}	$-\infty<\alpha_e<0$

(3.4) と上表から符号を考えて，(3.14) を書くと，

I_{-e} では $\omega=[(1-\sqrt{1-4\alpha_e})/2\alpha_e]\omega_e$ (3.18)

II_{-e} では $\omega=[(1+\sqrt{1-4\alpha_e})/2\alpha_e]\omega_e$ (3.19)

III_{-e} では $\omega=-[(1+\sqrt{1-4\alpha_e})/2\alpha_e]\omega_e$ (3.20)

となる。尙，振動数図示の要綱は Table 3.1 に示されている。表中のヤコビヤンに就いては（附録）を参照されたい。

TABLE 3.1.—FREQUENCY MAPPINGS

Plane		ω-χ	
Primitive region	I	II	III
Range of α	$-\infty<\alpha<\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}<\alpha<1$	$1<\alpha<\infty$
Frequency of encounter, ω_e	$\omega_e=\omega(1-\alpha)$	$\omega_e=\omega(1-\alpha)$	$\omega_e=-\omega(1-\alpha$
Apparent wave heading, χ_e	$\chi_e=\chi$	$\chi_e=\chi$	$\chi_e=\chi+\pi$
Plane		ω_e-χ_e	
Inverted region	I-e	II-e	III-e
Range of α_e	$-\infty<\alpha_e<\frac{1}{4}$	$0<\alpha_e<\frac{1}{4}$	$-\infty<\alpha_e<0$
Wave frequency, ω	$\omega=\left[\frac{1-\sqrt{1-4\alpha_e}}{2\alpha_e}\right]\omega_e$	$\omega=\left[\frac{1+\sqrt{1-4\alpha_e}}{2\alpha_e}\right]\omega_e$	$\omega=-\left[\frac{1+\sqrt{1-4\alpha_e}}{2\alpha_e}\right]\omega_e$
Wave heading	$\chi=\chi_e$	$\chi=\chi_e$	$\chi=\chi_e-\pi$
Jacobian of transformation, $\partial\omega/\partial\omega_e$	$\frac{1}{\sqrt{1-4\alpha_e}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-4\alpha_e}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-4\alpha_e}}$

In the above expressions $\alpha=\frac{\omega v\cos\chi}{g}$ and $\alpha_e=\frac{\omega_e v\cos\chi_e}{g}$

以下示される図に就いて簡単に説明すると，Fig. 3.3 では Fig. 3.1 に描かれた，ω_e=一定の曲線が三つの領域に分けられている。Fig. 3.4 では逆の場合を示し，Fig. 3.5 では之等の逆の場合が，全て結合されている。

IV. 船の応答

1: 規則的な海面状態

r_1，ω_1，χ，及びε_1 で性格付けられる簡単な正弦変化をする海面を，船が速度 v で航走する時，運動 S の反応振巾の自乗は

$$[S_1]^2=[r_1]^2[A_s(\omega_1,\chi_1,v)]^2 \tag{4.1}$$

ω_1，χ_1，v の時の出会度数を $(\omega_e)_1$ とすると

$$S(t)=\sqrt{[r_1]^2\cdot[A_s(\omega_1,\chi_1,v)]^2}\cdot\cos[(\omega_e)_1t+\varepsilon_1+\varepsilon_s] \tag{4.2}$$

2: 乱れた海面状態

理論を線型で扱うことから，“多数の正弦波に対する船の応答の和は，波の和に対する応答に等しい”という事を仮定する。応答振巾演算子を用いると，応答振巾の自乗の和は，

$$[S(\omega,\chi,v)]^2=\sum_{m=0}^{r}\sum_{n=0}^{g}[r)\omega_{2n+1},\chi_{2m+1})]^2\cdot[A_s(\omega_{2n+1},\chi_{2m+1},v)]^2\cdot[(\omega_{2n+2}-\omega_{2n})(\chi_{2m+2}-\chi_{2m})] \tag{4.3}$$

此の和の極限を $R_s{}^*$ とすれば，

$$R_s{}^*\triangleq\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi}[r(\omega,\chi)]^2[A_s(\omega,\chi,v)]^2d\chi\cdot d\omega \tag{4.4}$$

(4.3) の各項について唯一つの ω_s の値を $\omega_e(\omega_{2n+1}\chi_{2m+1})$ とし，時間に関する不変量を新たな位相差として一括し，$\varepsilon_s'(\omega_{2n+1},\chi_{2m+1})$ とすれば

$$S(t)=\sum_{n=0}^{r}\sum_{m=0}^{g}\{r[(\omega_{2n+1},\chi_{2m+1})]^2[A_s(\omega_{2m+1},\chi_{2m+1},v)]^2\cdot[(\omega_{2n+2}-\omega_{2n})(\chi_{2m+2}-\chi_{2m})]\}^{\frac{1}{2}}\times\cos[\omega_e(\omega_{2n+1},\chi_{2m+1})t+\varepsilon_s'(\omega_{2n+},\chi_{2m+1})] \tag{4.5}$$

3: 応答スペクトル

スペクトルを得るための手順は，

(1) $\omega-\chi$ 平面に関する海面のエネルギースペクトラムは三つの領域 I，II，III に分けられる。即ち，

$$[r(\omega,\chi)]^2\triangleq[r_{\mathrm{I}}(\omega,\chi)]^2+[r_{\mathrm{II}}(\omega,\chi)]^2+[r_{\mathrm{III}}(\omega,\chi)]^2 \tag{4.6}$$

(2) 応答振巾演算子を用いて，

$$[r_{\mathrm{I}}((\omega,\chi)]^2[A_s(\omega,\chi,v)]^2+[r_{\mathrm{II}}(\omega,\chi)]^2\cdot[A_s(\omega,\chi,v)]^2+[r_{\mathrm{III}}(\omega,\chi)]^2[A_s(\omega,\chi,v)]^2 \tag{4.7}$$

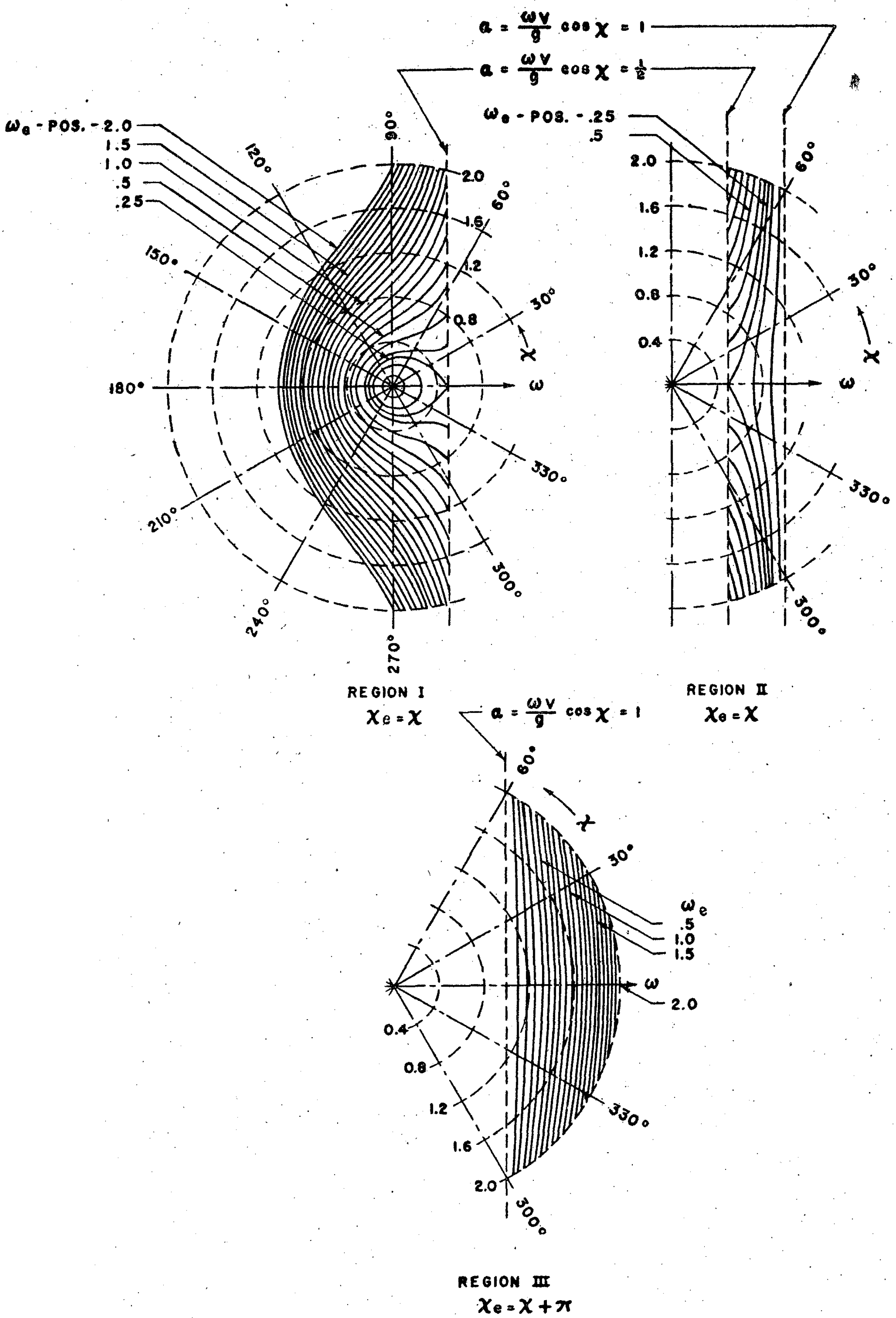


Fig. 3.3. Regions in the ω–χ Plane Where One-to-One Inverses Exist.
See explanatory note for Fig. 3.1.

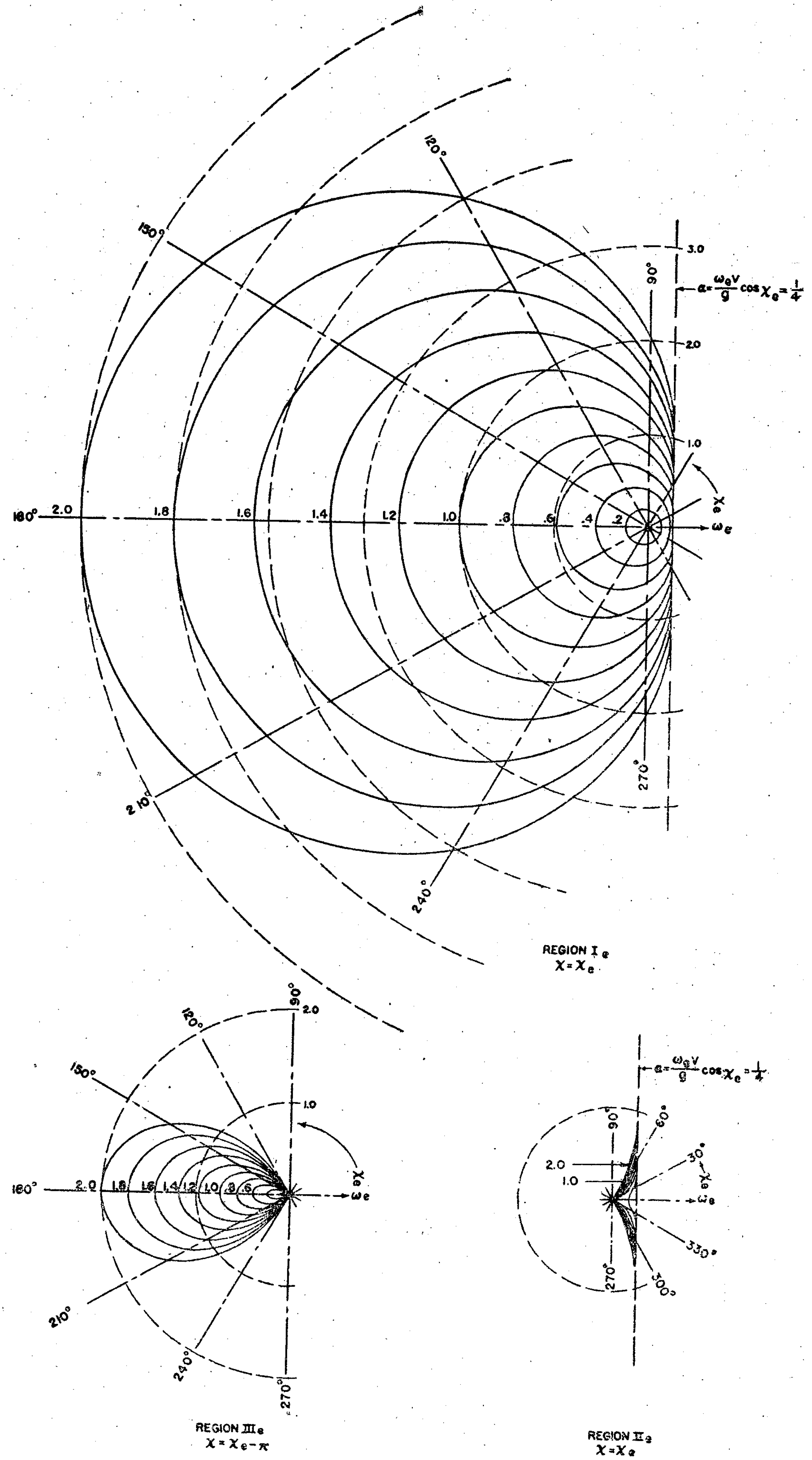


Fig. 3.4. The One-to-One Inverses of the Transformations of the Curves in the ω–χ Plane to the ω_e–χ_e Plane.

Coordinates and curves are lines of constant $\omega\cdot v/g$ and $\omega_e\cdot v/g$. Thus to get true v[illegible] multiply the scale values by g/v. In this figure. circles of constant ω_e have the values, $\omega_e\cdot v/g=1, 2, 3, 4, 5$ ang 6. The curves of constant ω are for constant increments $\omega\cdot v/g=0.20$.

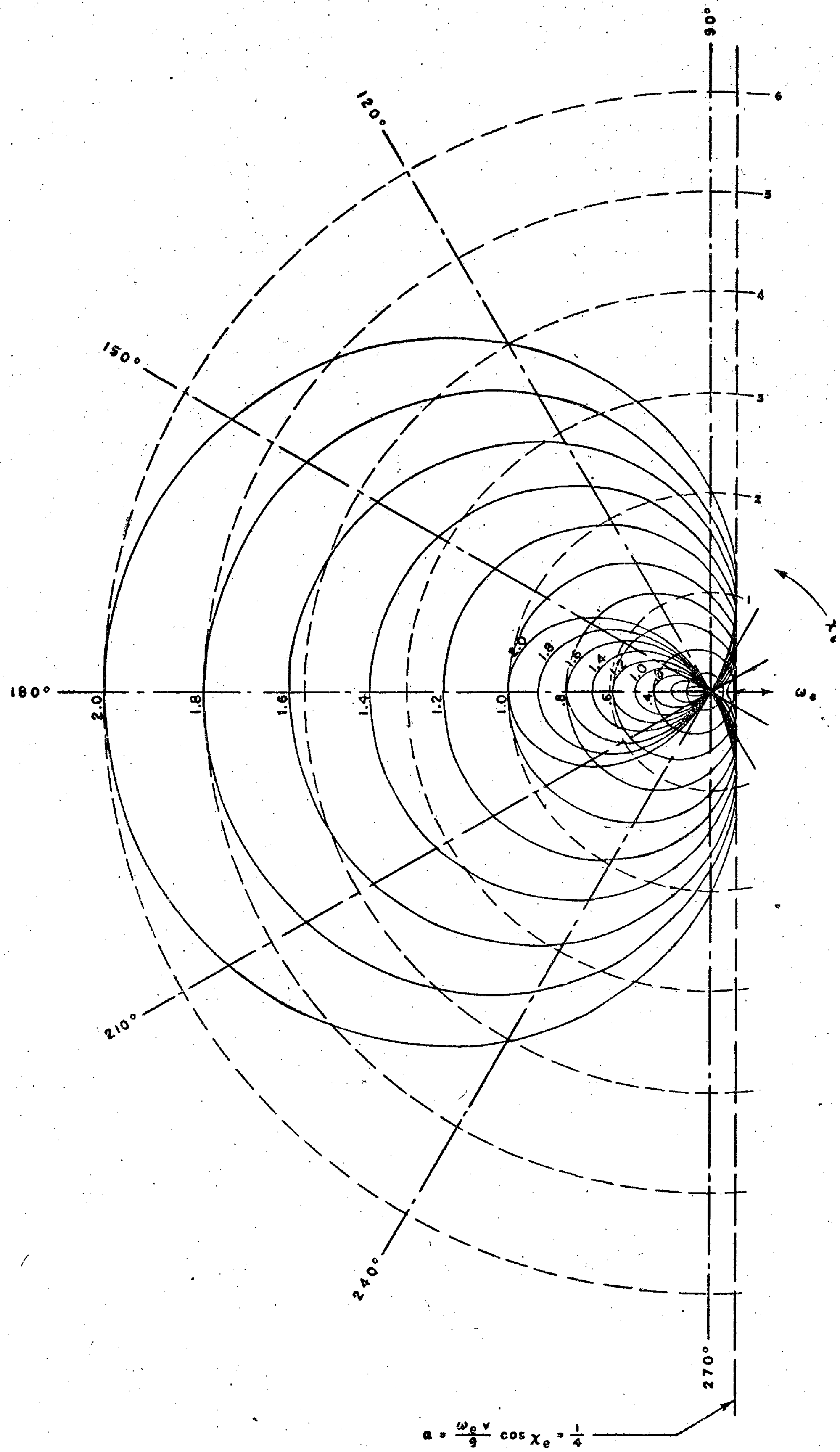


Fig. 3.5. Lines of Constant ω in the ω_e–χ_e Plane.
See explanatory note for Fig.3.4.

(3) 之等を $\omega_e-\chi_e$ 平面に就いて考えると，

$$\left[r_s\left(\left[\frac{1-\sqrt{1-4\alpha_e}}{2\alpha_e}\right]\omega_e,\chi_e\right)\right]^2 \times\left[A_s\left(\left[\frac{1-\sqrt{1-4\alpha_e}}{2\alpha_e}\right]\omega_e,\chi_e\right)\right]^2 +\left[r_{II}\left(\left[\frac{1-\sqrt{1-4\alpha_e}}{2\alpha_e}\right]\omega_e,\chi_e\right)\right]^2 \times\left[A_s\left(\left[\frac{1+\sqrt{1-4\alpha_e}}{2\alpha_e}\right]\omega_e,\chi_e\right)\right]^2 +\left[r_{III}\left(-\left[\frac{1+\sqrt{1-4\alpha_e}}{2\alpha_e}\right]\omega_e,\chi_e-\pi\right)\right]^2 \times\left[A_s\left(-\left[\frac{1+\sqrt{1-4\alpha_e}}{2\alpha_e}\right]\omega_e,\chi_e-\pi\right)\right]^2 \quad (4.8)$$

図示に関して (4.8) は二変数の函数であることから，

$$[r_{Ie}(\omega_e,\chi_e)]^2[A_{se}(\omega_e,\chi_e)]^2+[r_{II-e}(\omega_e,\chi_e)]^2 \times[A_{se}(\omega_e,\chi_e)]^2+[r_{III-e}(\omega_e,\chi_e)]^2 \times[A_{se}(\omega_e,\chi_e)]^2 \quad (4.9)$$

と簡単に書くことが出来る。

(4) (4.9) の ω_e, χ_e に関する積分は，最早 R^* に等しくない。等しくするために，ヤコビヤンを用いて，(ヤコビヤンに就いては附録参照のこと)。

$$\frac{[r_{Ie}(\omega_e,\chi_e)]^2[A_{se}(\omega_e,\chi_e)]^2}{\sqrt{1-4\alpha_e}} -\frac{[r_{II-e}(\omega_e,\chi_e)]^2[A_{se}(\omega_e,\chi_e)]^2}{\sqrt{1-4\alpha_e}} +\frac{[r_{IIIe}(\omega_e,\chi_e)]^2[A_{se}(\omega_e,\chi_e)]^2}{\sqrt{1-4\alpha_e}}=[S_{I-e}(\omega_e,\chi_e)]^2 -[S_{IIe}(\omega_e,\chi_e)]^2+[S_{III-e}(\omega_e,\chi_e)]^2 \quad (4.10)$$

(5) 応答スペクトルは (4.10) を χ_e に就いて積分すると，

$$[S(\omega_e)]^2=\int_{I-e}[S_{I-e}(\omega_e,\chi_e)]^2d\chi_e +\int_{IIe}[S_{II-e}(\omega,\chi_e)]^2d\chi_e +\int_{III-e}[S_{IIIe}(\omega_e,\chi_e)]^2d\chi_e \quad (4.11)$$

(6) (4.11) は累積エネルギー密度の定義から，

$$R_s^*(\omega_e)\triangleq\int_0^{\omega_e}[S(\omega_e)]^2d\omega_e \quad (4.13)$$

と表わされ，又，R_s^* の定義として，

$$R_s\triangleq\int_0^{\infty}[S(\omega_e)]^2d\omega_e \quad (4.14)$$

V. 船の運動

前の各節の結果から，船の運動は，次の様になる。

$$\left.\begin{aligned} &\text{heave} \quad z(t)=\int_0^\infty \cos[\omega_e t+\varepsilon(\omega_e)]\times\sqrt{[z(\omega_e)]^2d\omega_e}\\ &\text{Pitch} \quad \phi(t)=\int_0^\infty \sin[\omega_e t+\varepsilon(\omega_e)]\times\sqrt{[\phi(\omega_e)]^2d\omega_e}\\ &\text{Roll} \quad \varphi(t)=\int_0^\infty \sin[\omega_e t+\varepsilon(\omega_e)]\times\sqrt{[\varphi(\omega_e)]^2d\omega_e} \end{aligned}\right\} \quad (5.1)$$

1: スペクトルの数値決定

本論の理論展開では，海面状態のエネルギースペクトルに基き，船の応答振巾演算子と度数変換の適用に依り，応答エネルギースペクトルを導いた。然し船の運動の記録からスペクトルは直接に求められる。即ち，自己相関函数を用いる。此処で非正規自己相関函数は，

$$Q_s(h)\triangleq\lim_{t_n\to\infty}\frac{2}{t_n}\int_{t_0}^{t_0+t_n}S(t)\cdot S(t+h)dh \quad (5.2)$$

t_n は記録の期間，h は時間増加である。フーリエの余弦変換を行い，応答のエネルギースペクトルは，

$$[S(\omega_e)]^2=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty Q_s(h)\cos\omega_e h\cdot dh \quad (5.3)$$

この表わし方には二つの条件を含む。

(a) 運動の有効記録は無限に長い。

(b) 応答は，基本的性格，即ちガウス分布が変らぬ。

この積分は，部分和に置換えて求められる。要約すると

(1) 応答記録を，等間隔時間 Δt で分つ。

$$t_1-t_0=t_2-t_1=t_3-t_2\cdots\cdots=t_n-t_{n-1}\triangleq\Delta t \quad (5.4)$$

(2) 各時間，t_1, $t_2\cdots\cdots t_n$ に於ける応答は $S(t_1)$, $S(t_2)\cdots\cdots\cdots\cdots S(t_n)$

(3) 非正規自己相関函数は，

$$Q_s(h)=\frac{2}{n-h}\sum_{g=1}^{n-h}S(t_g)\cdot S(t_{g+h})\,;\ (h=0,1,2,\cdots m) \quad (5.6)$$

(4) $\pi(k-1/2)/\Delta t\cdot m<\omega_e<\pi(k+1/2)/\Delta t\cdot m$ の間のエネルギーは

$$L_k=\frac{1}{m}\left[Q_s(o)+2\sum_{h=1}^{m-1}Q_s(h)\cos\frac{\pi hk}{m} +Q_s(m)\cos\pi\right]:(k=0,1,2\cdots m) \quad (5.7)$$

(5) 区分点に於ける値の算定の影響の修正を行う。

$$U_k=0.23L_{k-1}+0.54L_k+0.23L_{k+1} \quad (5.8)$$

こゝで $L_{-1}=L_1$, $L_{m+1}=L_{m-1}$

(6) $\omega_e=(\pi k/\Delta t\cdot m)$ での $[S(\omega_e)]^2$ の最も良い算定は

$$[S(\omega_e)]^2=U_k\cdot\Delta t\cdot m/\pi \quad (5.9)$$

以上の方法による結果は系の自由度

$$f\triangleq(n-m/4)/m/2 \quad (5.10)$$

による。

2: 包絡線，最大値，零

Rice の研究から推定される波記録の性質は，船に適用され，(1.31)～(1.32) に相当する $S(t)$ の平均振巾は，次の如く与えられる。

(a) 平均振巾　$\bar{S}=0.866\sqrt{R_s^*}$　(5.11)

(b) 有義振巾　$\bar{S}_{1/3}=1.415\sqrt{R_s^*}$　(5.12)

(c) 最大振巾から 1/10 とつた平均の振巾

$$\bar{S}_{1/10}=1.80\sqrt{R_s^*} \qquad (5.13)$$

規則的な海面上に於ける振動運動と異り，不規則な海面上での運動は，最大振巾の数と零点を横切る数とは一致せず，一般に最大振巾の数の方が大きい。運動 S に就いては，一秒間に零点を横切る回数は次の様に表わされる。

$$2\bar{f}_s=1/\pi\left[\int_0^\infty \omega_e^2[S(\omega_e)]^2 d\omega_e \Big/ \times\int_0^\infty [S(\omega_e)]^2 d\omega_e\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (5.14)$$

こゝで $\bar{f}_s$ は，運動 S の平均周期を意味する。之に対して最大振巾の平均回数は

$$2(\bar{f}_s)_m=1/\pi\left[\int_0^\infty \omega_e^4[S(\omega_e)]^2 d\omega_e \Big/ \times\int_0^\infty \omega_e^2[S(\omega_e)]^2 d\omega^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (5.15)$$

3:　極端な運動

Longuet-Higgins は N の波の記録中，最高の波の振巾に対する確率分布函数を導いた。これは波記録の包絡線に就て行われたもので，この様にして N ケの波の中の最高波の振巾の期待値が得られる。

振動の数N	20	50	100
運動の振巾	$1.87+\sqrt{R_s^*}$	$2.12\times\sqrt{R_s^*}$	$2.28\times\sqrt{R_s^*}$

振動の数N	200	500	1000
運動の振巾	$2.43\times\sqrt{R_s^*}$	$2.60\times\sqrt{R_s^*}$	$2.73\times\sqrt{R_s^*}$

最大振巾の値は $[\log N]^{\frac{1}{2}}$ に従つて増えて行き，N が相当大きくなつても信頼出来る様であるが，統計学上，屡々見られる如く，余り極端な値を取ると失敗する事がある。

結　　論

本論文に展開された本質的な構想は，船の運動がガウス分布的経歴を持つという事，叉運動は (4.11) に依て決まる応答スペクトルで完全に性格付けられるという事である。従つて荒海に於ける船の反応は，過度現象の連続であるというより寧ろ定常状態の経過を辿るものだという概念に到達する。

荒海中の船の運動を，海面状態の統計的な表現に基く，応答スペクトルで表わすことは，此の分野に於て造船技術者が，多くの問題に実用的な解決を与えるのに貢献するであろう。

(附録)　ヤコビヤンに就て

応答振巾演算子と海象状態のスペクトルの積を $\omega_e-\chi_e$ 平面に図示するためには，$\omega-\chi$ 平面から $\omega_e-\chi_e$ 平面への転換にヤコビヤンを使用する。ヤコビヤンは次の様に定義される。

$$J\left(\frac{\omega,\chi}{\omega_e,\chi_e}\right)\triangleq\frac{\partial(\omega,\chi)}{\partial(\omega_e,\chi_e)}\triangleq\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\omega}{\partial\omega_e} & \dfrac{\partial\omega}{\partial\chi_e}\\ \dfrac{\partial\chi}{\partial\omega_e} & \dfrac{\partial\chi}{\partial\chi_e}\end{vmatrix}$$

$\partial\chi/\partial\omega_e=0$，$\partial\chi/\partial\chi_e=1$ から

$$J\left(\frac{\omega,\chi}{\omega_e,\chi_e}\right)=\frac{\partial\omega}{\partial\omega_e}$$

従つて両領域間は次の様な，ヤコビヤンで関係附けられる。

I *to* I_{-e}　$1/\sqrt{1-4\alpha_e}$

II *to* II_{-e}　$-1/\sqrt{1-4\alpha_e}$

III *to* III_{-e}　$1/\sqrt{1-4\alpha_e}$　　(以上)

(元良誠三)

端が拘束された変断面梁の曲げモーメント

Bending Moment on Beams of Non-Uniform Cross-Section with Ends Wholly or Partially Constrained By Prof. A. M. Robb TINA vol. 94. 1952.

拘束された変断面梁に任意の荷重がかゝつている時のモーメント分布を図式で求める方法を述べたもので，実際には両端固定のもの，及び一端固定，一端単純支持のものを例に挙げて説明し，終りにモーメント分配法 (H. Cross 法) との関係について触れている。元来が変断面梁から成る不静的構造物に H. Cross 法を適用する時に役立てようとして行つたものらしく，割に要領よく纏まつている。

両端が完全に拘束された梁

両端単純支持のときのモーメント分布 M_S と断面二次モーメントの逆数 $1/I$ は例えば第1図の如く与えられているとする。これから M_S/I の曲線は直ちに得られ