

「船舶工学入門」 流体関係

内容構成は大筋で以下の通り

- ① 浮体の静力学と復原性
- ② 船が受ける抵抗
- ③ 推進器
- ④ 船の動揺

他に比べて流体関係だけ密度が違うが、造船系の大学院に進学しない限り「船の流体」を学ぶ機会は無いと思うので、一通りの基礎をカバーしておくことにした。

波による船体の動揺

船体運動学は、船が直進する以外の運動をする場合の全般を扱い、大きく分けると「波による動揺」と「操縦運動」の二分野がありますが、時間が限られるので「操縦運動」は省略して、「波」と「波による動揺」の話だけをします。

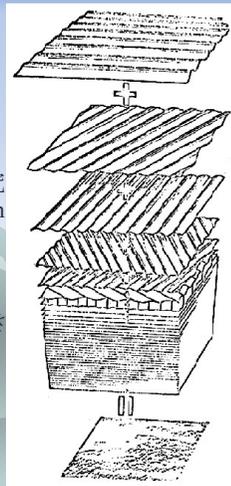
まず、波浪の概要を説明してから、特に微小振幅波について説明する。

現実の波 (1)

海面に起こる波は、遠浅の海岸に打ち寄せるうねりが強い規則性を持っているように見えるのを除けば、周波数、伝播方向ともに不規則で、極めて複雑に思える。

右図は、不規則波の取扱いについて研究して手法の確立に多大な貢献をしたPiersonとNeumannらが1955年に発表した論文に出ているもので、伝播方向も周波数(波長)も波高も様々な無数の規則波を重ね合わせることによって、現実の不規則波が表現できることを示している。

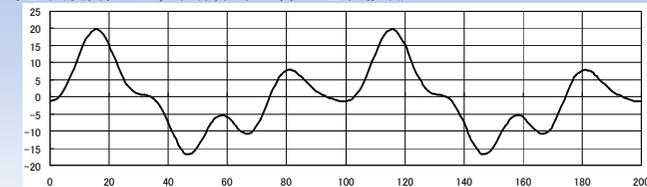
こうした不規則性は確率・統計論で取り扱われ、周波数(波長)と波高のvarietyは周波数ベースのエネルギースペクトルで表現され、伝播方向のvarietyは波方向スペクトルという形で表現される。



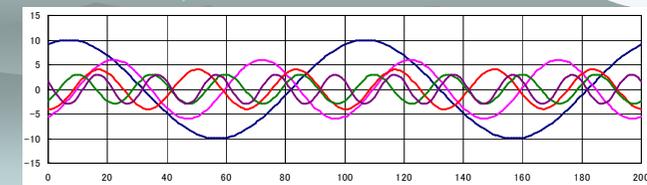
From Pierson, Neumann, James (1955)

不規則波の表現:パワースペクトル (2)

一見不規則だが、周期的に繰り返す波形



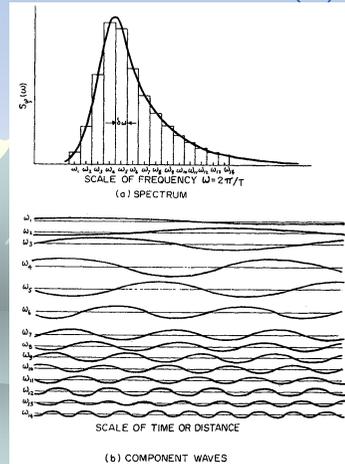
上の波形の要素波



不規則波の表現: パワースペクトル (3)

パワースペクトルと要素波の関係を図に示すが, (a)で代表周波数 ω_i のところのパワースペクトル高さに $\delta\omega$ を掛けたものが ω_i の周波数を持つ要素波のパワー(エネルギー)であり, 振幅はその平方根に比例する.

パワースペクトル自体には要素波の位相情報を含まない, 要素波の位相は乱数を使って決める. したがって, 或るパワースペクトルに対応する不規則波形は一つでなく, イロイロあるということになる.



波の方向スペクトル

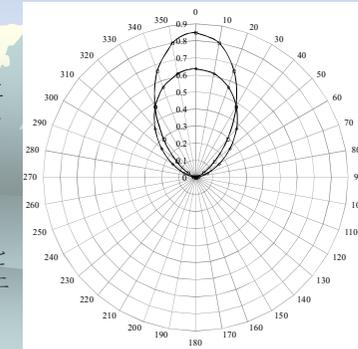
我国では不規則波の方向スペクトルとして,

$$G(\theta) = \frac{2^{2s} \cdot s!^2}{\pi \cdot (2 \cdot s)!} \cdot \cos^{2s}(\theta - \theta_0) \left[\theta_0 - \frac{\pi}{2} < \theta < \theta_0 + \frac{\pi}{2} \right],$$

$$= 0 \text{ [Otherwise]}$$

が良く使われる.

0度を主たる伝播方向とした場合に, $s=1$ と $s=2$ の方向スペクトル関数をRader Chartに描いて図に示すが, $s=2$ の方が主たる伝播方向付近に波エネルギーが集中している. こんな具合に主たる伝播方向とは異なる方向に伝播する波エネルギーが存在する.



微小振幅波 (線形波)

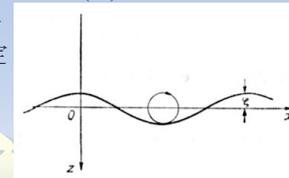
規則波(周期と波高が一定の波)に関しては, 線形理論で扱う微小波高の波と有限波高の波(非線形波)に分けられるが, ここでは微小波高の波についてだけ説明する.

水深と波長との関係から, 深水波, 浅水波, 長波に分類され, 造船屋は大洋航行中の船と波の拘わりを論ずることが多いので深水波を重視する傾向があるが, 一般論としては浅水波を論ずるべきであり, その特別な場合として深水波と長波があると理解するのが適切である.

なお, 波の発生と伝播については, 特に波浪予測に関連する理論などが船舶の運航に絡んで重要であるが, ここでは説明を省略する.

自由表面条件 (1)

自由表面を有する理想流体を考え, 静止状態での自由表面に固定して水平にx軸, 垂直にz軸を取る. 速度ポテンシャルを ϕ , 波面の高さを ζ とすると, 以下の二つの式で自由表面の境界条件が与えられる.



自由表面においては圧力が一定になるが, 線形の(2次の項を無視した)非定常ベルヌーイの式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g \cdot z = p = 0$$

より $\zeta = -\frac{1}{g} \cdot \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{z=\zeta}$ (圧力一定の条件)を得,

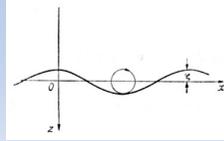
波面の上下方向速度が波面での上下方向流速に等しいことから

$$\frac{d\zeta}{dt} = - \left[\frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=\zeta} \text{ (運動学的条件)を得る.}$$

自由表面条件 (2)

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{z=\zeta} \quad (\text{圧力一定の条件})$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \left[\frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=\zeta} \quad (\text{運動学的条件})$$



二つの式をまとめるため、圧力一定の式を時間で微分すると、

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{1}{g} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right]_{z=\zeta}$$

これを運動学的条件と合わせると、下式を得る。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - g \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad \text{at } z = \zeta$$

波面の変位: ζ が微小[$\zeta = O(\epsilon) \ll 1$]だとし、摂動法を適用して一次の解だけを得れば、線形の自由表面条件は下式となる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - g \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad \text{at } z = 0$$

微小波高の浅水波 (1)

波高が波長に比べて微小だと仮定したときの解を微小波高の波といい、正弦波になる。

まず、水深: h が波長と同程度の浅水波(Shallow water wave)を想定し、波の速度ポテンシャルを求める。問題は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad h \geq z \geq 0 \quad (\text{二次元のPoisson方程式})$$

を境界条件

$$(1) \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad \text{at } z = h \quad (2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - g \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad \text{at } z = 0$$

のもとに解くことになる。x軸方向に進む規則波だとすれば

$$\phi = f(z) \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t)$$

として良いが、この場合、上の方程式と境界条件は下記となる。

$$d^2 f(z) / dz^2 - k^2 \cdot f(z) = 0, \quad h \geq z \geq 0$$

$$(1) df(z) / dz = 0, \quad \text{at } z = h$$

$$(2) g \cdot df(z) / dz + \omega^2 \cdot f(z) = 0, \quad \text{at } z = 0$$

波数と周波数, 波長と周期

x軸方向に進む規則波は

$$\phi = f(z) \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t)$$

と書けるが、ここで k は波数, ω は(円)周波数と呼ばれる。規則波は定点で見ると時間経過にしたがって上下動し、瞬間の波形でみると空間的に上下動しているが、時間的変動の周期を波周期(T と書く)、空間的変動の周期を波長と呼び、 λ と書くことが多い。

周波数は

$$\omega = 2\pi / T$$

で、波周期から計算されるが、波数 k は空間変動に対する周波数に対応し、波長 λ と下式の関係にある。

$$k = 2\pi / \lambda$$

つまり、最初の式はx軸方向には波長 λ で周期的に変動し、時間的には波周期 T で変動する規則波を表している。

微小波高の浅水波 (2)

微分方程式: $d^2 f(z) / dz^2 - k^2 \cdot f(z) = 0$ の一般解は

$$f(z) = A \cdot e^{kz} + B \cdot e^{-kz}$$

であるが、境界条件: $df(z) / dz = 0, \quad z = h$ より

$$df(z) / dz|_{z=h} = A \cdot k \cdot e^{kh} - B \cdot k \cdot e^{-kh} = 0$$

$$\Rightarrow A = C \cdot e^{-kh}, \quad B = C \cdot e^{kh} \quad \text{となり,}$$

$$f(z) = C \cdot \{e^{k(z-h)} + e^{-k(z-h)}\}$$

を得るので、速度ポテンシャルは

$$\phi(x, z) = C \cdot \{e^{k(z-h)} + e^{-k(z-h)}\} \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t)$$

となる。更に境界条件: $g \cdot df(z) / dz + \omega^2 \cdot f(z) = 0, \quad z = 0$ より

$$g \cdot df(z) / dz + \omega^2 \cdot f(z)|_{z=0} = C \cdot \{g \cdot k \cdot (e^{-kh} - e^{kh}) + \omega^2 \cdot (e^{-kh} + e^{kh})\} = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 / g = k \cdot (e^{kh} - e^{-kh}) / (e^{kh} + e^{-kh}) = k \cdot \tanh(kh)$$

を、波数と周波数(波長と周期)の関係式として得る。

微小波高の浅水波 (3)

速度ポテンシャル

$$\varphi(x, z) = C \cdot \{e^{k(z-h)} + e^{-k(z-h)}\} \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t)$$

に対応する表面波形は、線形の自由表面境界条件

$$\zeta = -\frac{1}{g} \cdot \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{z=0} \quad (\text{圧力一定の条件})$$

より,

$$\zeta(x, t) = -\frac{C \cdot \omega}{g} \cdot (e^{kh} + e^{-kh}) \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t)$$

を得るので、波振幅を a と書けば

$$a = -\frac{C \cdot \omega}{g} \cdot (e^{kh} + e^{-kh}) = -\frac{2C \cdot \omega}{g} \cdot \cosh(kh)$$

であるから、速度ポテンシャルを下記のように書くことができる。

$$\varphi(x, z) = -\frac{a \cdot g}{\omega} \cdot \frac{\cosh\{k(z-h)\}}{\cosh(kh)} \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t)$$

微小波高の浅水波 (4)

波の伝播速度: $c(=\omega/k)$ は、波数と周波数の関係式
 $\omega^2 / g = k \cdot \tanh(kh)$

を用いれば,

$$\frac{g}{\omega} = \frac{c \cdot k \cdot g}{\omega^2} = \frac{c}{\tanh(kh)}$$

と書けるから、 c を使うと、速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} \varphi(x, z) &= -\frac{a \cdot g}{\omega} \cdot \frac{\cosh\{k(z-h)\}}{\cosh(kh)} \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) \\ &= -\frac{c \cdot a}{\tanh(kh)} \cdot \frac{\cosh\{k(z-h)\}}{\cosh(kh)} \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) \\ &= -c \cdot a \cdot \frac{\cosh\{k(z-h)\}}{\sinh(kh)} \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) \end{aligned}$$

と書くことができる。

微小波高の浅水波 (5)

以上をまとめると、水深が波長と同程度で h の場合、振幅が a の波の速度ポテンシャルは

$$\varphi = -c \cdot a \cdot \frac{\cosh k(z-h)}{\sinh kh} \cdot \cos(kx - \omega t), \quad \zeta = a \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t)$$

である。波速: c および周波数(周期)と波長との関係は,

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \cdot \tanh kh} = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2\pi} \cdot \tanh \frac{2\pi \cdot h}{\lambda}}$$

$$\frac{\omega^2}{g} = k \cdot \tanh kh = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \tanh \frac{2\pi \cdot h}{\lambda}$$

となって、いずれも水深: h に依存した形になる。波の進行速度は水深: h が小さいほど遅くなるので、海岸に波が斜めに入射しても、海岸線に到達する時には殆ど波頂線が海岸線と平行になる。

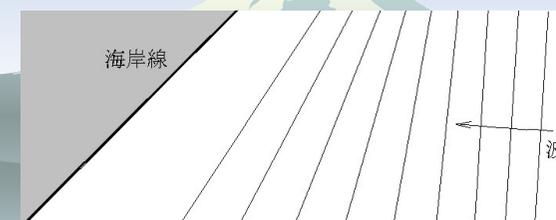
速度ポテンシャルから流速を計算すると下式を得る。

$$\frac{u}{c \cdot a \cdot k} = \frac{\cosh k(z-h)}{\sinh kh} \cdot \sin(kx - \omega t), \quad \frac{w}{c \cdot a \cdot k} = -\frac{\sinh k(z-h)}{\sinh kh} \cdot \cos(kx - \omega t)$$

海岸に打ち寄せる波

長波を除いて、波の伝播速度は波長に依存するため、同じ形の不規則波が空間的に移動することにはならず、眼に見える波の形状は時々刻々変化する。

深水波を除いて、波の伝播速度は水深が浅いほど遅くなるので、次第に浅くなる海岸に打ち寄せる波の稜線は、岸に近づくにつれて海岸線と平行になる。



微小波高の浅水波 (6)

速度ポテンシャルから計算した速度を積分して波のorbital motionを求めると、

$$x = a \cdot \frac{\cosh k(z_0 - h)}{\sinh kh} \cdot \cos(kx_0 - \omega t) + x_0$$

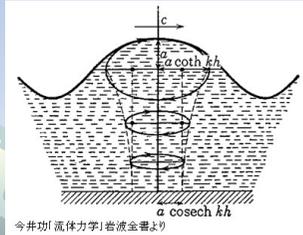
$$z = a \cdot \frac{\sinh k(z_0 - h)}{\sinh kh} \cdot \sin(kx_0 - \omega t) + y_0$$

となり、波粒子は楕円軌道を描く。

楕円の長径:Aと短径:Bは

$$A = a \cdot \frac{\cosh k(z_0 - h)}{\sinh kh}, \quad B = a \cdot \frac{\sinh k(z_0 - h)}{\sinh kh}$$

で与えられる。つまり、図のように波が右側に進む時、波粒子は時計回りに楕円を描くが、底に近づくにつれて楕円は扁平になり、底(z₀=h)では上下方向の運動が消えて左右方向の運動のみが残り、境界条件を満足している。水面ではBの値がaとなって波振幅に一致し、Aの値はa・coth(kh)となる。



今井功「流体力学」岩波金書より

微小波高の深水波 (1)

水深が波長に比べて十分大きい場合は深水波 (Deep water wave)となるが、深水波は浅水波のh→∞の極限に相当している。浅水波の速度ポテンシャル

$$\varphi = -c \cdot a \cdot \frac{\cosh k(z-h)}{\sinh kh} \cdot \cos(kx - \omega t)$$

の振幅関数を変形し、h→∞の極限を計算してみると

$$-c \cdot a \cdot \frac{\cosh k(z-h)}{\sinh kh} = -c \cdot a \cdot \frac{e^{k(z-h)} + e^{-k(z-h)}}{e^{kh} - e^{-kh}} = -c \cdot a \cdot \frac{e^{k(z-2h)} + e^{-kz}}{1 - e^{-2kh}}$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} -c \cdot a \cdot \frac{e^{k(z-2h)} + e^{-kz}}{1 - e^{-2kh}} = -c \cdot a \cdot e^{-kz}$$

を得るので、速度ポテンシャルは

$$\varphi = -c \cdot a \cdot e^{-kz} \cdot \cos(kx - \omega t)$$

となる。これが深水波の速度ポテンシャルである。

微小波高の深水波 (2)

表面波形は、浅水波の場合と同様で

$$\zeta = a \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t)$$

である。浅水波の周波数と波数の関係

$$\frac{\omega^2}{g} = k \cdot \tanh kh = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \tanh \frac{2\pi \cdot h}{\lambda}$$

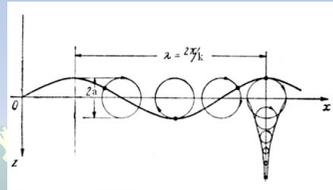
は、x→∞でtanh(x)→1であるから

$$\frac{\omega^2}{g} = k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \lambda = \text{波長}$$

が波数と周波数(波長と周期)の関係式となる。これより波速:cは

$$c = \omega / k = \sqrt{g \cdot \lambda / 2\pi}$$

である。これは波高=2a、波長=2π/kの正弦波が速度cでx軸の正方向に進行していることを示す。伝播速度cが波長の1/2乗に比例して変わるのが、深い海に起こる重力波の特徴である。



微小波高の深水波 (3)

周期Tはλcであるから、

$$T = \frac{\lambda}{c} = \frac{\lambda}{\sqrt{g \cdot \lambda / 2\pi}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot \lambda}{g}}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot g}{\lambda}} = \sqrt{k \cdot g}, \quad k = \frac{\omega^2}{g}$$

を得る。

速度ポテンシャルをx, zで微分してx, z方向の速度を求めると、

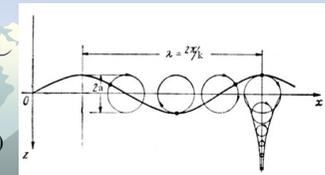
$$u = \partial\varphi/\partial x = a \cdot \omega \cdot e^{-kz} \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t)$$

$$w = \partial\varphi/\partial z = a \cdot \omega \cdot e^{-kz} \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t)$$

を得る。波の構成粒子の運動を

orbital motionというが、(本来は速度を積分して座標値すなわち粒子の軌跡を求めるべきだが) x, z方向の速度だけからでも波粒子が1箇所を円運動を画くことが理解される。Orbital motionの大きさは表面からの深さ:dにつれe^{-kd}に比例して減少する。

なお水粒子は円運動するだけで、波の進行方向には移動しない。



長波(Long wave) (1)

深水波と逆で、 $h \rightarrow 0$ の極限が長波である。すなわち、水域の厚さが波長に比べて極めて小さい場合に相当する。その場合

$$\cosh k(z-h) \rightarrow 1, \quad \sinh kh \rightarrow kh$$

であるから浅水波の速度ポテンシャルは、長波では

$$\phi = -c \cdot a \cdot \frac{\cosh k(z-h)}{\sinh kh} \cdot \cos(kx - \omega t) \rightarrow -\frac{c \cdot a}{kh} \cdot \cos(kx - \omega t)$$

となる。周波数と波長(波数)の関係は、 $\tanh(x) \rightarrow x$ より

$$\frac{\omega^2}{g} = k \cdot \tanh kh \rightarrow \frac{\omega^2}{g} = k^2 \cdot h = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot h$$

となり、波速: c は

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{g \cdot h} \quad \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = g \cdot h$$

となって、水深の平方根に比例し、周波数には依存しない。このため(浅水波や深水波は波の形を変化させつつ伝播するが)長波は波形を変えることなく、水深が浅くなるほど速度を減じて伝播する。

長波(Long wave) (2)

長波の速度ポテンシャル

$$\phi = -\frac{c \cdot a}{kh} \cdot \cos(kx - \omega t)$$

を x, z で微分して x, z 方向の速度を求めると、

$$u = \partial\phi/\partial x = \frac{a \cdot \omega}{kh} \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t), \quad w = \partial\phi/\partial z = 0$$

となり、 z 方向速度は0で水粒子は x 方向に往復運動するだけである。これは、深さ方向の寸法が無視できるほど小さいとしているから、当然のことである。 x と $x+\Delta x$ の二断面の間にある水の容積: V の Δt 間における変化: ΔV を計算すれば下記の関係が導かれ、 x 方向に往復運動に伴って水面が上下に動くだけであることが確認される。

$$\Delta V = h \cdot \{u(x) - u(x + \Delta x)\} \cdot \Delta t$$

$$\Delta \zeta = \frac{\Delta V}{\Delta x} = h \cdot \frac{u(x) - u(x + \Delta x)}{\Delta x} \cdot \Delta t \rightarrow \partial \zeta / \partial t = -\partial u / \partial x \cdot h$$

$$\zeta = a \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t), \quad \partial \zeta / \partial t = -a \cdot \omega \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t)$$

$$\partial u / \partial x \cdot h = a \cdot \omega \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t)$$

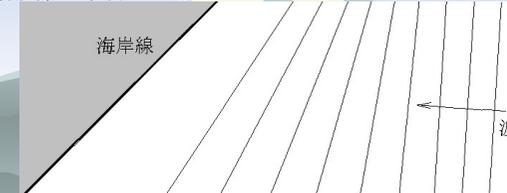
微小波高の規則波:まとめ

	深水波	浅水波	長波
水深	波長の50%以上	波長の3%以上, 50%以下	波長の3%以下
周波数: ω と波長: λ	$\frac{\omega^2}{g} = \frac{2\pi}{\lambda}$	$\frac{\omega^2}{g} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \tanh\left(\frac{2\pi \cdot h}{\lambda}\right)$	$\frac{\omega^2}{g} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot h$
波の伝播速度: c	波長に依存 $c = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2\pi}}$	波長と水深に依存 $c = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2\pi} \cdot \tanh\left(\frac{2\pi \cdot h}{\lambda}\right)}$	水深に依存 $c = \sqrt{g \cdot h}$
粒子の速度振幅: u_A	$u_A = a \cdot \omega$ a:波の振幅	$u_A = a \cdot \omega / \tanh\left(\frac{2\pi \cdot h}{\lambda}\right)$	$u_A = a \cdot \sqrt{\frac{g}{h}}$
波粒子の軌道	円軌道を描く。軌道半径は水面から離れると急速に減衰	楕円軌道を描く。底に近づくに動きが小さくかつ楕円が扁平になり、底では往復動	往復動

体験できる現象との関係

長波を除いて、波の伝播速度は波長に依存するため、同じ形の不規則波が空間的に移動するということにはならず、眼に見える波の形状は時々刻々変化する。

深水波を除いて、波の伝播速度は水深が浅いほど遅くなるので、次第に浅くなる海岸に打ち寄せる波の稜線は、岸に近づくにつれて海岸線に平行になる。



長波における水粒子の速度は、水深の平方根に反比例する。これは沖合では然程でなかった津波が、海岸付近では極めて激しい流れになって甚大な被害をもたらすことにつながる。

津波 (1)

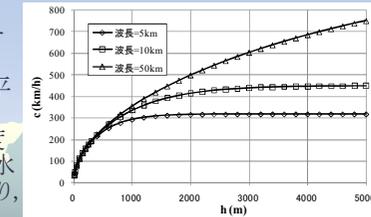
長波は水域の厚さが0に近付いた場合に相当するので、水粒子は水平方向にだけ正弦関数的な変動で運動する。或る場所で水が右に流れるとすると、半波長だけ離れた所では左に流れるので、その中間では水面が上下するという形の波動になる。

波長が通常の数値で水深が浅い長波なら上記の理解で良いが、波長が1kmから数10kmの大津波が大洋を横切る場合には、些か複雑である。これはチリ地震の津波が三陸沿岸を襲った場合に相当するが、発生した付近では長波ないし浅水波であった津波は、太平洋を沖に進むにつれて場合によっては深水波になる(波長10kmの津波でも水深4000mの場所を通る時は深水波)。それがまた陸岸に近くなると浅水波となり、遂には長波となって陸岸を襲うのである。

大洋の真ん中で水深が十分にあれば、津波といえども長周期の深水波に過ぎず、波高数mの超長周期波であるから船が乗り切るのに然程の困難は無い。しかし陸岸を襲う時には長波になって居り、人間のスケールでみると「波動」ではなく「流れ」になってしまうから、まるで激流が襲ったような様相を呈するのである。

津波 (2)

波長をパラメータとし、水深をパラメータとし、水深ベースに津波の伝播速度を計算してみると右図のようになる。深水波の伝播速度は波長の平方根に比例するので、長波長の津波は大洋中を猛烈な速度で伝播する。波長5kmの波は水深1500m以上では深水波となり、伝播速度は時速300km強



で水深に依存しなくなるが、波長が10km, 50kmとなると更に高速で伝播する。岸に近くなって水深が浅くなるにつれ浅水影響で伝播速度は遅くなり、長波になると伝播速度は水深の平方根に比例する。

Wikipediaでは外洋の水深は4000m程度としながら、津波を長波とみなして伝播速度を計算しているが、水深4000mにおける伝播速度は上図のように波長に依存し、波長5kmで300km/h強、波長10kmで320km/h強、波長50kmで700km/h弱である。こうしてみると、「外洋ではジェット機、沿岸でも新幹線の数倍」という説明は概ね正しい。

津波 (3)

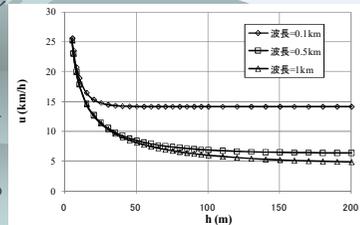
問題は長波の流速: uが

$$u = \frac{a \cdot \omega}{kh} \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t)$$

となり水深: hに逆比例することで、陸岸近くで水深が浅くなるにつれ、流速が急激に大きくなるから大変である。浅水波の流速の式

$$u = c \cdot a \cdot k \cdot \frac{\cosh k(z-h)}{\sinh kh} \cdot \sin(kx - \omega t)$$

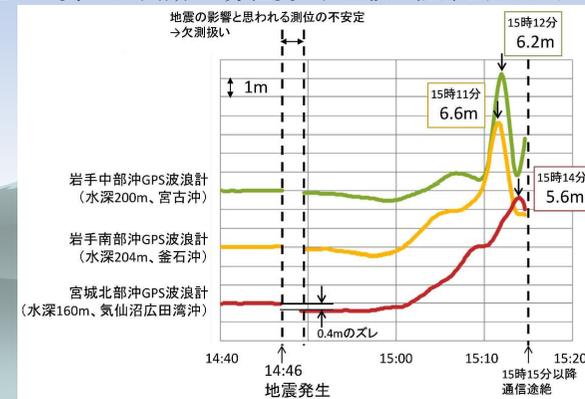
から、波長をパラメータとして水深と流速の関係性を求めた結果を図に示す。流速に対する波長の影響は浅い所では表れず、深水域で表れることが分かる。



水深が小さくなって流速が大きくなることは波長に関係ないことから、超長波長の波(津波)の恐ろしさは「その速度で襲ってくる水塊の量が膨大である点にある」ことが理解できる。

3.11大震災の津波 (1)

東北沖に設置されたGPS波浪計の記録を、環境建設の畑田先生に見せて貰った。周期が4分程度の孤立波が記録されている。



3.11大震災の津波 (2)

水深が200mの所で周期:4分程度の波が観測されているが、その波長はどれくらいだろうか?

間違いなく長波の領域だと思われるから、長波の式

$$\frac{\omega^2}{g} = k \cdot \tanh kh \rightarrow \frac{\omega^2}{g} = k^2 \cdot h = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot h$$

を使って計算してみると、 $k \cdot h = 0.11822$ を得、 $\tanh(k \cdot h) = 0.11768$ であるから、長波の条件:

$$k \cdot h \approx \tanh kh$$

を満足していると言える。kから波長を計算すると10.628kmを得る。

「周期:4分」と言ったが、波形を見ると「ゼロから立ち上がり、マイナスには行かずにゼロに戻るまでが4分間」となっているので、半波が4分間だと見た方が良く、半波長が10kmで振幅が6mの波のゼロレベルより上にある水の容積は

$$10,000\text{m} \times 6\text{m} \times 2/\rho = 40,000\text{m}^3/\text{m}$$

つまり、幅1m当り4万トンというトンデモナイ量である。

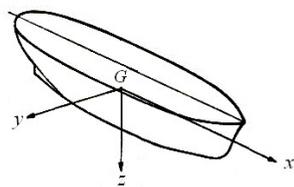
波による動揺について

運動の自由度と船体運動の名称

空間を運動する物体の運動の自由度は六つ(三つの直交した軸方向への移行運動と、各軸の周りの三つの回転運動)である。

直交軸:物体の慣性主軸

座標原点:重心



1-1 図

	移行		回転	
	一方向運動	往復運動	一方向運動	往復運動
x軸	前進 go ahead 後進 go stern	前後揺れ surging	横傾斜 heel	横揺れ rolling
y軸	横漂流 drifting	左右揺れ swaying	縦傾斜 trim	縦揺れ pitching
z軸	浮上 floating 沈下 sinking	上下揺れ heaving (& dipping)	旋回 turning	船首揺れ yawing

運動方程式の成り立ち (1)

Newtonの運動方程式を、剛体運動の各成分について書けば

$$m \cdot \frac{du}{dt} = X, \quad m \cdot \frac{dv}{dt} = Y, \quad m \cdot \frac{dw}{dt} = Z$$

$$I_x \cdot \frac{dp}{dt} = L, \quad I_y \cdot \frac{dq}{dt} = M, \quad I_z \cdot \frac{dr}{dt} = N$$

のようになる。

剛体を質点の集合とみなしてNewtonの運動方程式を適用すると、「剛体の運動方程式には、遠心力やジャイロモーメントの項が含まれる」ことになるが、波浪中運動に関して「線形化して良い」と仮定する場合は、高次の非線形項である遠心力やジャイロモーメントを無視して良く、将にNewtonの運動方程式そのものを適用して良いことになる。

しかし実際にはこのように単純な形でなく、複雑な方程式が使われているので、何故そうした形になるのか、以下に背景を説明する。

運動方程式の成り立ち (2)

問題を簡略化して、図のような円筒浮体が波の中で上下運動する場合を考える。ここでは釣合い点からの変位を z と書くことにすれば、運動方程式は

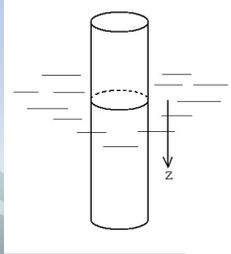
$$m \cdot \frac{dz}{dt} = 0, \quad m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = Z = Z_w + Z_E$$

となる。 Z は外力であるが、その中に水から受ける力: Z_w があるので、それを分離しておく(Z_E は水以外からの外力)。

波が有ると水面が変位するので、波面の変位量を ζ と書く。 z と ζ が等しいとは限らないので、円筒の喫水は $(z-\zeta)$ だけ釣合い状態と異なり、単純に浮力だけを考えた場合

$$Z_w = \rho g \cdot A_w \cdot (z - \zeta)$$

なる力を受ける。厳密には相対変位: $(z-\zeta)$ の一次微分や二次微分を含む関数で、 Z_w が表現できるとするのが適切である。



運動方程式の成り立ち (3)

浮体が波の中にある場合に水から受ける上下方向の力: Z_w は、浮体の変位: z と波面の変位量: ζ の差: $z-\zeta$ の関数になる。これは $z-\zeta$ およびその変化速度、加速度の関数になるということである。すなわち

$$Z_w = F(z-\zeta) = F(z-\zeta, \dot{z}-\dot{\zeta}, \ddot{z}-\ddot{\zeta})$$

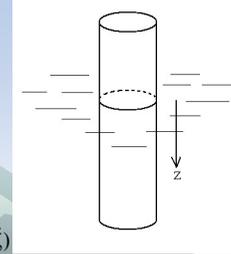
であるが、 z も ζ も微小量であるとして線形重ね合わせの原理を適用すると

$$Z_w = F(z-\zeta, \dot{z}-\dot{\zeta}, \ddot{z}-\ddot{\zeta}) = F_1(z, \dot{z}, \ddot{z}) - F_2(\zeta, \dot{\zeta}, \ddot{\zeta})$$

を得、浮体の上下動に依存する力: F_1 (運動流体力)と波面の上下動に依存する力: F_2 (波強制力)に分離される。この式を運動方程式に代入して、運動に依存する項をまとめると次式を得る。

$$m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = F_1(z, \dot{z}, \ddot{z}) - F_2(\zeta, \dot{\zeta}, \ddot{\zeta}) + Z_E$$

$$\Rightarrow m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} - F_1(z, \dot{z}, \ddot{z}) = Z_E - F_2(\zeta, \dot{\zeta}, \ddot{\zeta})$$



運動方程式の成り立ち (4)

$$m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} - F_1(z, \dot{z}, \ddot{z}) = Z_E - F_2(\zeta, \dot{\zeta}, \ddot{\zeta})$$

この式を、 z も ζ も微小量であるとして線形化すれば、運動流体力: F_1 は z およびその変化速度、加速度の線形関数に、波強制力: F_2 は ζ およびその変化速度、加速度の関数になるので、上の運動方程式は

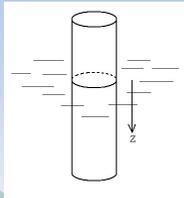
$$(m + m_2) \cdot \frac{d^2z}{dt^2} + B_2 \cdot \frac{dz}{dt} + C_2 \cdot z = Z_E + m_c \cdot \frac{d^2\zeta}{dt^2} + B_c \cdot \frac{d\zeta}{dt} + C_c \cdot \zeta$$

と書くことができる。これらの係数の内、 m_2 と m_c 、 B_2 と B_c 、 C_2 と C_c は互いに似通った性質を持つ。

波浪中運動を論ずる時は、波から受ける力以外の外力: Z_E を考えないことが多いので、結局、一自由度の波浪中運動方程式は

$$(m + m_2) \cdot \frac{d^2z}{dt^2} + B_2 \cdot \frac{dz}{dt} + C_2 \cdot z = m_c \cdot \frac{d^2\zeta}{dt^2} + B_c \cdot \frac{d\zeta}{dt} + C_c \cdot \zeta$$

という形になる。



運動流体力 (運動する浮体に作用する流体反力)

上下動だけ(一自由度)の方程式は、Newtonの運動方程式から

$$(m + m_2) \cdot \frac{d^2z}{dt^2} + B_2 \cdot \frac{dz}{dt} + C_2 \cdot z = m_c \cdot \frac{d^2\zeta}{dt^2} + B_c \cdot \frac{d\zeta}{dt} + C_c \cdot \zeta$$

という形になるが、右辺の波強制力は後回しにして、先ず運動流体力(下の赤枠内)について説明する。

$$m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} + m_2 \cdot \frac{d^2z}{dt^2} + B_2 \cdot \frac{dz}{dt} + C_2 \cdot z = m_c \cdot \frac{d^2\zeta}{dt^2} + B_c \cdot \frac{d\zeta}{dt} + C_c \cdot \zeta$$

左辺の第一項は慣性力であるが、第二項は恰も慣性力が増えたかのような作用をするので「付加質量による力」と位置付けられる。第三項は速度に比例する反力であり、「減衰力」と位置付けられる。第四項は変位に比例する反力であり、「復原力」と位置付けられる。

付加質量について

水上または水中で物体が運動するとき、加速、減速が空気中で行う場合に比べて困難に感じられたり、振子の固有周期が長くなったり、あたかも物体の質量が増加したかのようになることを「付加質量効果」と呼んでいる。

これは、物体が動くに際して周囲の水も一緒に動かすことのために発生する現象であるので、真空中でない限り、空気中でも同様の効果は存在する。付加質量は物体と同体積の流体の質量と同程度になると考えて良いが、通常の物体の質量は同体積の空気の質量に比べて圧倒的に大きいので、付加質量効果は無視して良い。

周囲の流体の浮力で自らの重量を支えている物体の場合、物体と同体積の周囲流体の質量は物体の質量に等しいので、「付加質量効果」はこうした物体に特有の現象だと言える。したがって船に限らず、空気中に有っても気球や飛行船については付加質量効果は無視できない。

運動流体力: (運動する浮体に作用する流体反力)

上下動(Heaving)を例にとり、図のようにL/C(Load Cell)を介して船を強制的に上下動させた時、L/Cで計測される力は、

$$m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} + m_z \cdot \frac{d^2z}{dt^2} + B_z \cdot \frac{dz}{dt} + C_z \cdot z$$

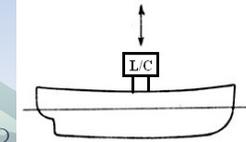
となり、慣性力: $m \cdot \frac{d^2z}{dt^2}$ だけでなく、赤枠内の項: 流体力が加わった形になる。

船をsin関数に従って強制的に上下動させるとすれば、上下変位は $z = a \cdot \sin \omega t$ であり、速度、加速度は

$$\frac{dz}{dt} = a \cdot \omega \cdot \cos \omega t, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -a \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t = -\omega^2 \cdot z$$

となるので、L/Cに加わる力は下記となる。

$$(m + m_z) \cdot \frac{d^2z}{dt^2} + B_z \cdot \frac{dz}{dt} + C_z \cdot z = a \cdot \{C_z - \omega^2 \cdot (m + m_z)\} \cdot \sin \omega t + \omega \cdot B_z \cdot \cos \omega t$$



運動流体力: $m_z \cdot \frac{d^2z}{dt^2} + B_z \cdot \frac{dz}{dt} + C_z \cdot z$ (運動する浮体に作用する流体反力)

したがって上下動と同位相の成分は

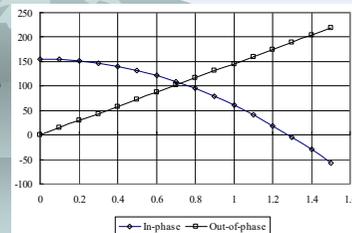
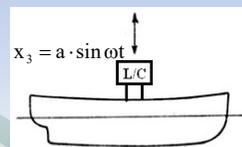
$$a \cdot \{C_z - \omega^2 \cdot (m + m_z)\}$$

と90度位相が進んだ成分は

$$a \cdot B_z \cdot \omega$$

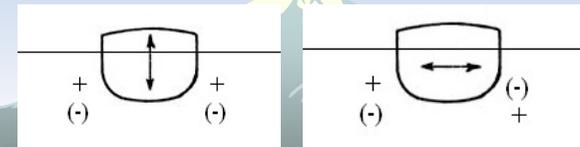
となる。幾つかの周波数について解析した結果を周波数: ω ベースにプロットすると、右図のような傾向が得られ(実験結果はこんなにキレイには並ばないが)、これらから m_z , B_z が推定できる。

実際の m_z , B_z には若干の周波数依存性があるが、この図は定数として書いてある。



船体の対称性と運動モード間の連成 (対称運動と反対称運動)

通常の船体は左右対称の形状で、対称面(船体中心線を含む鉛直面)内の運動(Surge, HeaveとPitch)を対称運動、対称面外の運動(Sway, RollとYaw)を反対称運動と呼び、それぞれグループをなす。



対称運動によって発生する圧力場は左右対称。

反対称運動によって発生する圧力場は左右反対称。

上記のような対称性から、対称運動と反対称運動の間では、連成(Coupling)は発生しないが、対称運動の相互間、反対称運動の相互間では連成(Coupling)が起こり得る。

ベニスのゴンドラ

ベニスのゴンドラは例外で、片方だけを漕いでも真直ぐ進むように、左右非対称形をしている。



波浪中運動で使う運動方程式

- 前後揺れ : surge x_1, x
- 左右揺れ : sway x_2, y
- 上下揺れ : heave x_3, z
- 横揺れ : roll x_4, ϕ
- 縦揺れ : pitch x_5, θ
- 船首揺れ : yaw x_6, ψ

例えば船が上下揺れすると、上下方向の力だけでなく縦揺れ方向のモーメントも発生する。その逆も起こる(相反定理)ので、上下揺れと縦揺れは連成する。

(1) 前後揺れの運動方程式
 $M \cdot \ddot{x}_1 = F_1$

そのため、船体運動の方程式には連成流体力の項が含まれる。

(2) 上下揺れおよび縦揺れの運動方程式
 $(M + A_{3,3}) \cdot \ddot{x}_3 + B_{3,3} \cdot \dot{x}_3 + C_{3,3} \cdot x_3 + A_{1,5} \cdot \ddot{x}_5 + B_{1,5} \cdot \dot{x}_5 + C_{1,5} \cdot x_5 = F_3$
 $A_{5,3} \cdot \ddot{x}_3 + B_{5,3} \cdot \dot{x}_3 + C_{5,3} \cdot x_3 + (I_5 + A_{5,5}) \cdot \ddot{x}_5 + B_{5,5} \cdot \dot{x}_5 + C_{5,5} \cdot x_5 = F_5$

(3) 左右揺れ、横揺れおよび船首揺れの運動方程式
 $(M + A_{2,2}) \cdot \ddot{x}_2 + B_{2,2} \cdot \dot{x}_2 + A_{2,4} \cdot \ddot{x}_4 + B_{2,4} \cdot \dot{x}_4 + A_{2,6} \cdot \ddot{x}_6 + B_{2,6} \cdot \dot{x}_6 = F_2$
 $A_{4,2} \cdot \ddot{x}_2 + B_{4,2} \cdot \dot{x}_2 + (I_4 + A_{4,4}) \cdot \ddot{x}_4 + B_{4,4} \cdot \dot{x}_4 + C_{4,4} \cdot x_4 + A_{4,6} \cdot \ddot{x}_6 + B_{4,6} \cdot \dot{x}_6 = F_4$
 $A_{6,2} \cdot \ddot{x}_2 + B_{6,2} \cdot \dot{x}_2 + A_{6,4} \cdot \ddot{x}_4 + B_{6,4} \cdot \dot{x}_4 + (I_6 + A_{6,6}) \cdot \ddot{x}_6 + B_{6,6} \cdot \dot{x}_6 = F_6$

ここに、M: 船の質量、 I_4, I_5, I_6 : 横揺れ、縦揺れ、船首揺れの慣性モーメント、 A_{ij} : 付加質量、 B_{ij} : 減衰力係数、 C_{ij} : 復原力係数 ($i,j=2,3,\dots,6$)、 F_i : 波強制力、波強制モーメント ($i,j=1,2,\dots,6$)

一自由度系の振動

一自由度系の振動問題は、減衰が無い場合の固有振動数 $\omega_0^2 = C/M$ [1]

と、Critical Damping

$$CD = 2\sqrt{M \times C} \quad [2]$$

を用いて正規化した微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha \cdot \omega_n \times \frac{dx}{dt} + \omega_n^2 \times x = \frac{F}{M}, \quad \text{where } \omega_n^2 = \frac{C}{M}, \alpha = \frac{N}{2\sqrt{M \cdot C}}$$

で表現できる。Critical Dampingは減衰の指標であり、減衰がそれより大きいか小さいかによって固有応答の特性が変わる。

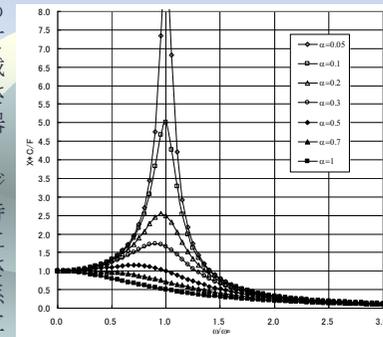
なお、減衰がある場合にも固有振動数を[1]式で書くことが多いが、これは減衰係数: α が小さい場合の近似解でしかないので一般船のRollingでは良いが、PitchingやHeavingの場合には正しとは言えない。しかし、減衰係数が小さくなければ固有振動が目立って表れないので、固有振動数が正確に幾つかということも問題にならず、概略値が分かれば良い。したがって、[1]式で固有振動数(の概略値)が推定できると考えて良い。

強制振動の無次元応答関数 (1)

$\bar{x} \times C / \bar{F}$ は、外力の振動数(ω)が0に近くなると1に近付き、 ∞ に近くなると0に近付き、減衰係数(α)が小さい時には同調率(ω/ω_n)が1付近で非常に大きくなる。これが同調(共振)現象である。

減衰係数(α)が小さいために大きく揺れて困る例として船の横揺れや各種の機械振動があるが、逆に α が小さいから良い例として弦楽器や管楽器がある。

物理系ではないが、ラジオやテレビのアンテナで特定の周波数を受信するのに同調(共振)現象が利用されている。これらは減衰係数(α)が大きかったら成り立たない。



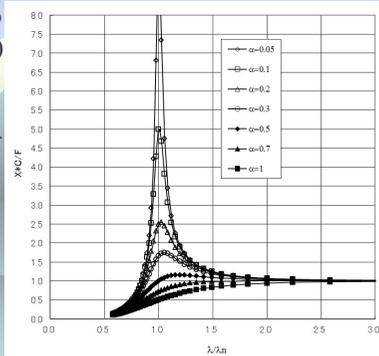
強制振動の無次元応答関数 (2)

先の図は横軸に周波数で定義した同調率(ω/ω_n)をとって応答関数を示しているが、船の波浪中動揺を論ずる時は入射波の波長: λ を横軸にとった方が分かり易い。

重力波(Gravity Wave)の深水波(Deep Water Wave)の場合には、

$$\lambda \propto \sqrt{1/\omega}$$

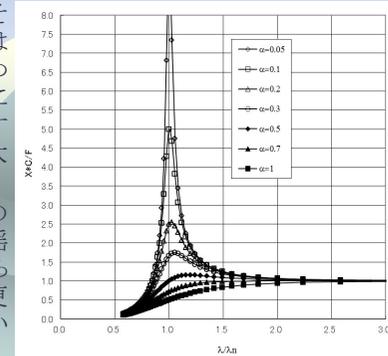
であるから、横軸を書き直すと右図を得る。



強制振動の無次元応答関数 (3)

この図は、強制力に対する揺れの大きさを表しているのですが、波の振幅や表面傾斜の振幅に対する揺れの大きさを考える場合には、別途、波の振幅や表面傾斜の振幅に対する強制力の大きさを考えなければならぬが、それは「波長が短い領域では小さく、波長が長くなるにつれて大きくなって一定値に収束する」という傾向を示すので、波に対する揺れの大きさも右図と同様になる。

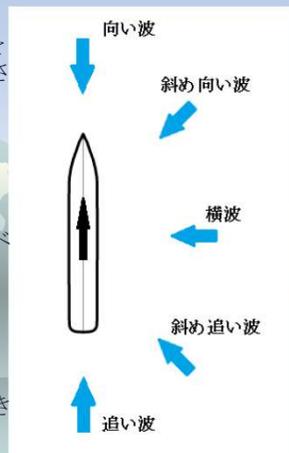
横揺れは減衰が小さいので $\alpha=0.1\sim 0.2$ のカーブ、縦揺れは減衰が大きく $\alpha=0.3$ くらいのカーブ、上下揺れは更に減衰が大きく $\alpha=0.5$ くらいのカーブになる。



波浪中の動揺が問題になる場合

船が走っていて波に会った時、僅かでも揺れると船酔いを起こすという人を対象外にすれば、安全性などが懸念される場合は限定される。その条件を整理してみる。

- (1) 波高が低ければ問題にならないので、波高が大きくなければならない。
- (2) 波の伝播方向における船の寸法(向い波なら船長、横波なら幅)に比べて波長が短いと、動揺を起こす強制力が大きくなるので、波長が長くなければならない。
- (3) 横揺れ、縦揺れ(上下揺れ)などの固有周期に近い周期で波と出会う、同調に近い状態では動揺振幅が大きくなる。



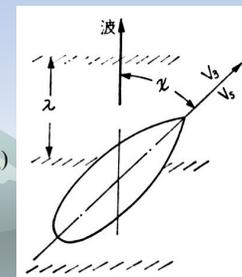
出会周期(period of encounter)

船が、図に示すように、波の進行方向と $\chi(\neq 90^\circ)$ なる角度を持って V_s なる速度で進むときは、Doppler効果によって船が波に遭遇する周期は変わってくる。この周期を出会周期という。

$$T_e = \lambda / (V_w - V_s \cdot \cos \chi) = \lambda / (\lambda / T_w - V_s \cdot \cos \chi)$$

χ が $0^\circ \sim 90^\circ$ すなわち追波のときは波の周期よりも出会周期は長く、 $90^\circ \sim 180^\circ$ すなわち向波のときは波の周期よりも出会周期は短くなる。

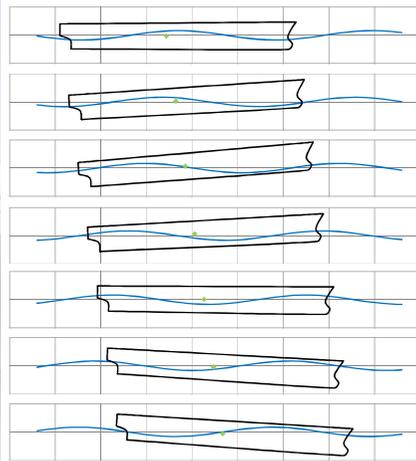
通常船の横揺れ固有周期は波周期より長いので、向波では同調せず、追波で同調することが多い。特に漁船の事故は追波に多いといわれる。



向い波中航走時の縦揺れと上下揺れ (1)

船の前側から波が来る状態を「向い波」と呼ぶ。図は長さ250mの船がその85%長さの向い波の中を20ノットで走っている状態を模式的に描いたものである。船体中央より後側を中心に縦揺れしているような動きであることと、波との位相関係から、船尾が波面から見てさほど動かないのに対し、船首は大きく上下に動いていることが分かる。

これが向い波中航走時の船体運動の特徴である。



向い波中航走時の縦揺れと上下揺れ (2)

前の図と同じ条件で船の速度だけが15ノットに下がった場合の船体運動を模式的に描いて右に示す。波長は船長の85%で、波振幅は5mである。運動のパターンは殆ど変わらないが、波面に対する船首の上下動がかなり小さくなっていることが分かる。

これが向い波中で最も良く揺れる状態(波長が船長の約85%)における船体運動の船速影響の特徴で、商船の速度範囲では速度が増すほど動揺が大きくなる。

